



И. В. Ященко
С. А. Шестаков

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Универсальный
многоуровневый
сборник задач

10–11 классы



**И. В. Ященко
С. А. Шестаков**

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Универсальный
многоуровневый
сборник задач**

10–11 классы

**Учебное пособие
для общеобразовательных организаций**

2-е издание

**Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2020**

УДК 373:512+512(075.3)
ББК 22.14я721+22.161я721
Я97

12+

Ященко И. В.

Я97 Алгебра и начала математического анализа. Универсальный многоуровневый сборник задач. 10—11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / И. В. Ященко, С. А. Шестаков. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2020. — 239 с. : ил. — ISBN 978-5-09-072795-2.

В данном учебном пособии содержатся задачи по курсу алгебры и началам математического анализа для 10—11 классов трёх уровней сложности в соответствии с концепцией математического образования. Задания уровня *А* можно использовать для отработки базовых математических навыков. Задания уровня *В* будут полезны учащимся, стремящимся продолжить образование в технических и экономических вузах (а также вузах со схожими требованиями к математической подготовке абитуриентов). Задания уровня *С* предназначены для учащихся, планирующих продолжить своё образование в вузах с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Книга будет полезна учащимся и учителям при подготовке к участию в международных сравнительных исследованиях качества образования, итоговой аттестации по математике, организации повторения и дифференцированной работы на уроках и факультативах.

УДК 373:512+512(075.3)
ББК 22.14я721+22.161я721

ISBN 978-5-09-072795-2

© Издательство «Просвещение», 2019
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2019
Все права защищены

Предисловие

Настоящее учебное пособие представляет собой универсальный многоуровневый сборник задач по алгебре и началам математического анализа для 10—11 классов.

Все задачи в сборнике распределены по главам (крупным тематическим разделам), которые, в свою очередь, разбиты на параграфы (более мелкие подразделы), сформированные в соответствии с функционально-алгебраическими или содержательными линиями школьного курса алгебры и начал математического анализа. Такая структура позволяет использовать задачник в качестве дополнения при работе с любым учебно-методическим комплектом, рекомендованным для средней школы, вне зависимости от порядка прохождения тем. Всего в задачнике 10 глав: «Числа и числовые выражения», «Алгебраические выражения», «Уравнения», «Системы уравнений», «Неравенства и системы неравенств», «Задачи с текстовым условием», «Представление данных, статистика, вероятность», «Функции и графики», «Начала математического анализа. Исследование функций», «Уравнения и неравенства с параметром и нестандартные уравнения и неравенства».

Задачник трёхуровневый. Распределение по уровням сделано в соответствии с Концепцией развития математического образования в Российской Федерации:

уровень А — математика для жизни и базовые математические навыки;

уровень В — математика для продолжения образования в технических, экономических и схожих по уровню требований вузах;

уровень С — «творческая» математика для продолжения образования в вузах с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Разумеется, распределение по уровням имеет в определённой степени условный характер. В некоторых содержательных блоках могут быть представлены задания не всех уровней сложности. Так, в параграф «Арифметические задачи с практическим содержанием» включены только задания уровня А, связанные с базовыми жизненными навыками (оплата электроэнергии или воды по показаниям счётчиков, покупки, суточные нормы потребления тех или иных полезных веществ и т. п.), а все задания главы «Уравнения и неравенства с параметром и нестандартные уравнения и неравенства» отнесены к

уровню С, поскольку решение таких заданий предполагает определённую исследовательскую деятельность.

Так как по окончании старшей школы каждый выпускник проходит аттестацию в форме ЕГЭ (базового или профильного уровня), на которой предлагаются задания по всему курсу школьной математики, то в данный сборник, с целью придания ему большей универсальности, включены и задания по тематике основной школы.

При составлении задачника авторы попытались обеспечить преемственность между традиционными для российского математического образования задачами и теми заданиями, которые вошли в практику массовой школы в последние годы через системы аттестаций и мониторингов разного рода и уровня (ОГЭ, ЕГЭ, PISA и многих других).

Для удобства использования в урочной деятельности каждая задача представлена в двух равноценных вариантах а) и б).

Ответы к заданиям пособия вы найдёте на сайте www.prosv.ru

Пособие может использоваться как самостоятельное издание, в качестве дополнения к серии пособий «Я сдам ЕГЭ! Математика», а также к любому учебно-методическому комплекту, в урочной и внеурочной деятельности, при проведении факультативных занятий и элективных курсов, а также для самостоятельного освоения учащимися методов решения задач разного типа и уровня сложности.

В работе над книгой самое деятельное и непосредственное участие принимал И. Р. Высоцкий, которого по праву можно считать одним из соавторов пособия.

Авторы выражают признательность и благодарность за неоценимую помощь в подготовке рукописи данного пособия Ю. Березуцкой, О. Виноградовой, О. Ворончагиной, В. Кисловской, А. Кострикиной, Д. Мануйлову, К. Спириной, А. Тюриной, Ю. Цимбалову и другим сотрудникам Московского центра непрерывного математического образования.

Авторы

Глава 1. Числа и числовые выражения

1.1. Целые числа и степени с натуральным показателем

Уровень А

- A1.** Найдите значение выражения:
а) $3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^4$; б) $2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2$.
- A2.** Найдите значение выражения:
а) $5^9 \cdot 2^8 : 10^7$; б) $7^2 \cdot 3^7 : 21^2$.
- A3.** Найдите значение выражения:
а) $(2^{22})^4 : 2^{85}$; б) $(5^{14})^5 : 5^{67}$.
- A4.** Найдите значение выражения:
а) $(81^6)^3 : (9^7)^5$; б) $(64^8)^4 : (8^7)^9$.
- A5.** Найдите значение выражения:
а) $(208^2 - 11^2) : 219$; б) $(183^2 - 13^2) : 196$.
- A6.** Найдите значение выражения:
а) $(625 + 618)^2 - 4 \cdot 625 \cdot 618$; б) $(854 + 850)^2 - 4 \cdot 854 \cdot 850$.
- A7.** а) Какая из разностей больше:
 $987 \cdot 876 - 765 \cdot 654$ или $986 \cdot 875 - 766 \cdot 655$?
б) Какая из сумм меньше:
 $999 \cdot 777 + 555 \cdot 333$ или $888 \cdot 777 + 555 \cdot 222$?
- A8.** Сравните числа: а) 6^{36} и 36^{17} ; б) 49^{27} и 7^{54} .
- A9.** Делится ли сумма:
а) $17^{14} + 17^{15}$ на 18; б) $10^{11} + 10^{13}$ на 101?
- A10.** Делится ли сумма:
а) $5^{21} + 5^{22} + 5^{23}$ на 31; б) $6^{31} + 6^{32} + 6^{33}$ на 43?

Уровень В

- B1.** Найдите значение выражения:
а) $(5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2)(5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7) - 597 \cdot 5970$;
б) $(7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2)(7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9) - 759 \cdot 7590$.
- B2.** Найдите значение выражения:
а) $|354 \cdot 352 - 355 \cdot 353| + |354 \cdot 356 - 355 \cdot 353|$;
б) $|265 \cdot 263 - 266 \cdot 264| + |265 \cdot 267 - 266 \cdot 264|$.
- B3.** Найдите значение выражения:
а) $5379^2 - 5378 \cdot 5380$; б) $9552 \cdot 9550 - 9551^2$.

- В4.** а) Найдите отрицательное число, квадрат которого равен $13889 \cdot 13891 + 1$.
 б) Найдите положительное число, квадрат которого равен $59919 \cdot 59921 + 1$.
- В5.** Найдите значение выражения:
 а) $480^3 - 480^2 - 480 \cdot 479 - 479^2 - 479^3$;
 б) $494^3 - 494^2 - 494 \cdot 493 - 493^2 - 493^3$.
- В6.** Сравните: а) 2^{99} и 3^{66} ; б) 2^{96} и 3^{64} .
- В7.** Найдите последнюю цифру произведения:
 а) $262 \cdot 263 \cdot 264 \cdot 266 \cdot 267$; б) $204 \cdot 206 \cdot 207 \cdot 208 \cdot 209$.
- В8.** Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:
 а) $827 \cdot 278 \cdot 782$ и 179786491 ;
 б) $743 \cdot 437 \cdot 374$ и 121434433 .
- В9.** а) Ровно одно из чисел 3326, 3307, 3325, 3321 является простым. Какое это число?
 б) Ровно одно из чисел 2966, 2969, 2965, 2961 является простым. Какое это число?
- В10.** а) Найдите натуральное число a , если известно, что из следующих утверждений два истинны, а одно ложно:
 1) остаток от деления числа a на число 13 равен 9;
 2) остаток от деления числа a на число 13 равен 10;
 3) a — одно из чисел 61 или 63.
 б) Найдите натуральное число a , если известно, что из следующих утверждений два истинны, а одно ложно:
 1) остаток от деления числа a на число 12 равен 8;
 2) остаток от деления числа a на число 12 равен 9;
 3) a — одно из чисел 56 или 58.

Уровень С

- С1.** Найдите x , если:
 а) $x^3 = 301^3 - 3 \cdot 301^2 + 902$; б) $x^3 = 201^3 - 3 \cdot 201^2 + 602$.
- С2.** Найдите число a , если:
 а) $2a^3 = 321^3 + 321^2 + 321 \cdot 320 + 320^2 + 320^3$;
 б) $2a^3 = 417^3 + 417^2 + 417 \cdot 416 + 416^2 + 416^3$.
- С3.** Не вычисляя произведение, сравните:
 а) $87 \cdot 88 \cdot 89$ и 891384 ; б) $95 \cdot 96 \cdot 97$ и 974640 .
- С4.** Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:
 а) $752 \cdot 753 \cdot 754$ и 426957014 ;
 б) $771 \cdot 772 \cdot 773$ и 460098866 .

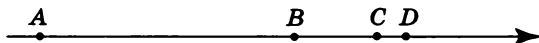
- C5.** Не вычисляя произведение, проверьте равенство:
 а) $529 \cdot 169 \cdot 961 = 299 \cdot 403 \cdot 713$;
 б) $121 \cdot 841 \cdot 361 = 319 \cdot 551 \cdot 209$.
- C6.** Найдите последнюю цифру числа: а) 749^{49} ; б) 754^{45} .
- C7.** а) Найдите остаток от деления натурального числа на 3, если известно, что остаток от деления этого числа на 9 равен 5.
 б) Найдите остаток от деления натурального числа на 4, если известно, что остаток от деления этого числа на 8 равен 7.
- C8.** а) Найдите наименьшее натуральное число, большее 2, остатки от деления которого на 3 и на 23 равны 2.
 б) Найдите наименьшее натуральное число, большее 2, остатки от деления которого на 7 и на 19 равны 6.
- C9.** а) Найдите наименьшее натуральное число, остатки от деления которого на 19 и 11 равны соответственно 16 и 8.
 б) Найдите наименьшее натуральное число, остатки от деления которого на 17 и 13 равны соответственно 15 и 11.
- C10.** Найдите натуральные числа x и y , если известно, что из следующих трёх утверждений два истинны, а одно ложно:
 а) 1) $4x + 9y = 135$; 2) $9x + 4y = 135$; 3) $6x + 11y = 240$.
 б) 1) $5x + 8y = 120$; 2) $8x + 5y = 120$; 3) $7x + 10y = 195$.

1.2. Дроби и степени с целым показателем

Уровень А

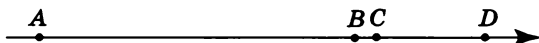
- A1.** Найдите значение выражения: а) $8,7 + 4,6$; б) $6,9 + 7,4$.
- A2.** Найдите значение выражения: а) $\frac{11}{4} + \frac{6}{5}$; б) $\frac{3}{4} + \frac{7}{25}$.
- A3.** Найдите значение выражения: а) $5\frac{5}{7} : \frac{5}{7}$; б) $8\frac{8}{9} \cdot \frac{9}{8}$.
- A4.** Найдите значение выражения:
 а) $0,456 \cdot 999 + 0,456$; б) $0,678 \cdot 1001 - 0,678$.
- A5.** Найдите значение выражения:
 а) $\left(\frac{8}{15} + \frac{3}{10}\right) \cdot 9$; б) $\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{20}\right) \cdot 10$.
- A6.** Найдите значение выражения: а) $\frac{3^{-5} \cdot 3^{-7}}{3^{-15}}$; б) $\frac{2^{-3} \cdot 2^{-13}}{2^{-19}}$.
- A7.** Найдите значение выражения: а) $\frac{(2^2 \cdot 2^6)^5}{(2 \cdot 2^8)^4}$; б) $\frac{(3^2 \cdot 3^5)^6}{(3 \cdot 3^7)^5}$.

- A8.** а) Какая из разностей больше: $0,987 \cdot 1,234 - 0,876$ или $0,987 \cdot 1,345 - 0,765$?
 б) Какая из сумм меньше: $9,876 \cdot 6,543 + 0,123$ или $9,876 \cdot 7,654 + 0,234$?
- A9.** а) На координатной прямой точки A , B , C и D соответствуют числам $-0,205$; $-0,052$; $0,02$; $0,008$.



Какой точке соответствует число $0,02$?

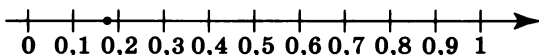
- б) На координатной прямой точки A , B , C и D соответствуют числам $-0,502$; $0,25$; $0,205$; $0,52$.



Какой точке соответствует число $0,25$?

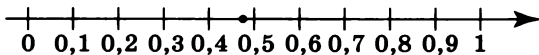
- A10.** а) Одно из чисел $\frac{3}{17}$; $\frac{4}{17}$; $\frac{8}{17}$; $\frac{14}{17}$ отмечено на прямой точкой.

Какое это число?



- б) Одно из чисел $\frac{6}{23}$; $\frac{7}{23}$; $\frac{11}{23}$; $\frac{12}{23}$ отмечено на прямой точкой.

Какое это число?



Уровень В

- B1.** Найдите значение выражения:

а) $\frac{2,097 \cdot 79,02}{20,97 \cdot 7,902}$;

б) $\frac{3,654 \cdot 45,63}{0,3654 \cdot 4,563}$.

- B2.** Восстановите показатель степени в равенстве:

а) $\frac{31^{-27} \cdot 31^{28}}{31^{\dots}} = 31^{12}$;

б) $\frac{38^{20} \cdot 38^{13}}{38^{\dots}} = 38^{-19}$.

- B3.** Найдите значение выражения:

а) $9,1 \cdot (0,1 : (0,0001 : 100))$;

б) $2,3 \cdot (0,001 : (0,1 : 10000))$.

- B4.** Сравните:

а) $(3 \cdot 10^{-2})^3$ и $0,000027$;

б) $(11 \cdot 10^{-3})^2$ и $0,000121$.

В5. Сравните произведения, не находя их значений:

а) $\frac{2}{5} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{29}{37}$ и $\frac{11}{37} \cdot \frac{29}{5} \cdot \frac{2}{19}$;

б) $\frac{2}{7} \cdot \frac{11}{7} \cdot \frac{23}{37}$ и $\frac{11}{37} \cdot \frac{23}{7} \cdot \frac{2}{17}$.

В6. Сравните:

а) $\frac{577}{696}$ и $\frac{578}{695}$;

б) $\frac{457}{772}$ и $\frac{456}{773}$.

В7. Сравните произведения, не находя их значений.

а) $\frac{169}{174} \cdot \frac{171}{175}$ и $\frac{170}{173} \cdot \frac{172}{174}$;

б) $\frac{271}{276} \cdot \frac{273}{277}$ и $\frac{272}{275} \cdot \frac{274}{276}$.

В8. Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:

а) $0,9477 \cdot 0,774$ и $0,7335199$;

б) $0,8368 \cdot 0,863$ и $0,7221585$.

В9. а) Какая из точек — $A\left(\frac{1}{65}\right)$ или $B\left(\frac{1}{67}\right)$ — числовой оси расположена дальше от точки $C\left(\frac{1}{66}\right)$?

б) Какая из точек — $A\left(\frac{1}{52}\right)$ или $B\left(\frac{1}{54}\right)$ — числовой оси расположена дальше от точки $C\left(\frac{1}{53}\right)$?

В10. Сравните: а) $\frac{928}{927}$ и $\frac{929}{928}$; б) $\frac{509}{508}$ и $\frac{510}{509}$.

Уровень С

С1. Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:

а) $\frac{1}{155} \cdot \frac{1}{156} \cdot \frac{1}{157}$ и $\frac{1}{3896260}$;

б) $\frac{1}{175} \cdot \frac{1}{176} \cdot \frac{1}{177}$ и $\frac{1}{5551600}$.

С2. Верно ли равенство:

а) $\frac{19}{196} \cdot \frac{14}{529} \cdot \frac{23}{361} = \frac{1}{6118}$;

б) $\frac{19}{256} \cdot \frac{16}{625} \cdot \frac{25}{361} = \frac{1}{7600}$?

С3. Не вычисляя сумму, проверьте, равны ли:

а) $0,718^2 + 0,871^2 + 0,187^2$ и $1,309135$;

б) $0,764^2 + 0,476^2 + 0,647^2$ и $1,228882$?

С4. Не вычисляя произведение, сравните:

а) $0,3916 \cdot 0,619$ и $0,2824004$;

б) $0,4257 \cdot 0,752$ и $0,2701264$.

С5. Сравните:

а) 7^{-952} и 50^{-476} ;

б) 6^{-530} и 37^{-265} .

В5. Сравните произведения, не находя их значений:

а) $\frac{2}{5} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{29}{37}$ и $\frac{11}{37} \cdot \frac{29}{5} \cdot \frac{2}{19}$;

б) $\frac{2}{7} \cdot \frac{11}{7} \cdot \frac{23}{37}$ и $\frac{11}{37} \cdot \frac{23}{7} \cdot \frac{2}{17}$.

В6. Сравните:

а) $\frac{577}{696}$ и $\frac{578}{695}$;

б) $\frac{457}{772}$ и $\frac{456}{773}$.

В7. Сравните произведения, не находя их значений.

а) $\frac{169}{174} \cdot \frac{171}{175}$ и $\frac{170}{173} \cdot \frac{172}{174}$;

б) $\frac{271}{276} \cdot \frac{273}{277}$ и $\frac{272}{275} \cdot \frac{274}{276}$.

В8. Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:

а) $0,9477 \cdot 0,774$ и $0,7335199$;

б) $0,8368 \cdot 0,863$ и $0,7221585$.

В9. а) Какая из точек — $A\left(\frac{1}{65}\right)$ или $B\left(\frac{1}{67}\right)$ — числовой оси расположена дальше от точки $C\left(\frac{1}{66}\right)$?

б) Какая из точек — $A\left(\frac{1}{52}\right)$ или $B\left(\frac{1}{54}\right)$ — числовой оси расположена дальше от точки $C\left(\frac{1}{53}\right)$?

В10. Сравните: а) $\frac{928}{927}$ и $\frac{929}{928}$; б) $\frac{509}{508}$ и $\frac{510}{509}$.

Уровень С

С1. Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:

а) $\frac{1}{155} \cdot \frac{1}{156} \cdot \frac{1}{157}$ и $\frac{1}{3896260}$;

б) $\frac{1}{175} \cdot \frac{1}{176} \cdot \frac{1}{177}$ и $\frac{1}{5551600}$.

С2. Верно ли равенство:

а) $\frac{19}{196} \cdot \frac{14}{529} \cdot \frac{23}{361} = \frac{1}{6118}$;

б) $\frac{19}{256} \cdot \frac{16}{625} \cdot \frac{25}{361} = \frac{1}{7600}$?

С3. Не вычисляя сумму, проверьте, равны ли:

а) $0,718^2 + 0,871^2 + 0,187^2$ и $1,309135$;

б) $0,764^2 + 0,476^2 + 0,647^2$ и $1,228882$?

С4. Не вычисляя произведение, сравните:

а) $0,3916 \cdot 0,619$ и $0,2824004$;

б) $0,4257 \cdot 0,752$ и $0,2701264$.

С5. Сравните:

а) 7^{-952} и 50^{-476} ;

б) 6^{-530} и 37^{-265} .

С6. Не вычисляя произведение, сравните:

а) $\frac{1}{382} \cdot \frac{1}{383} \cdot \frac{1}{384}$ и $\frac{1}{26481504}$; б) $\frac{1}{497} \cdot \frac{1}{498} \cdot \frac{1}{499}$ и $\frac{1}{63205494}$.

С7. Сравните:

а) $\frac{1}{372} + \frac{2}{373} + \frac{3}{374} + \frac{4}{375}$ и $\frac{1}{37}$; б) $\frac{1}{482} + \frac{2}{483} + \frac{3}{484} + \frac{4}{485}$ и $\frac{1}{48}$.

С8. Верно ли равенство:

а) $3,9175 \cdot 91,753 \cdot 175,39 \cdot 7539,1 = 3917,5 \cdot 917,53 \cdot 17,539 \cdot 7,5391$;

б) $6284,3 \cdot 284,36 \cdot 84,362 \cdot 4,3628 = 6,2843 \cdot 28,436 \cdot 843,62 \cdot 4362,8$

С9. Сравните:

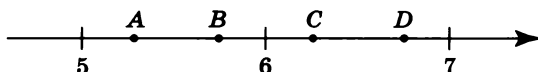
а) $\frac{0,943}{0,349 + \frac{1}{0,943 + \frac{1}{0,349}}}$ и $\frac{0,349}{0,943 + \frac{1}{0,349 + \frac{1}{0,943}}}$;

б) $\frac{0,156}{0,651 + \frac{1}{0,156 + \frac{1}{0,651}}}$ и $\frac{0,651}{0,156 + \frac{1}{0,651 + \frac{1}{0,156}}}$.

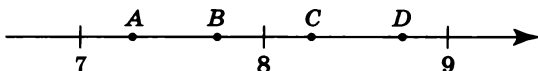
1.3. Корни и степени с дробным показателем

Уровень А

А1. а) На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D . Одна из них соответствует числу $\sqrt{28}$. Какая это точка?



б) На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D . Одна из них соответствует числу $\sqrt{77}$. Какая это точка?



А2. а) Какое из данных чисел принадлежит промежутку $[6; 7]$?

1) $\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{35}$ 4) $\sqrt{42}$

б) Какое из данных чисел принадлежит промежутку $[7; 8]$?

1) $\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{8}$ 3) $\sqrt{62}$ 4) $\sqrt{72}$

А3. а) Между какими числами заключено число $\sqrt{72}$?

1) 24 и 26 2) 8 и 9 3) 71 и 73 4) 4 и 5

б) Между какими числами заключено число $\sqrt{60}$?

- 1) 20 и 22 2) 7 и 8 3) 59 и 61 4) 3 и 4

A4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{70} \cdot \sqrt{0,7}$; б) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{90}$.

A5. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{17} - 3)(\sqrt{17} + 3)$; б) $(\sqrt{19} + 5)(\sqrt{19} - 5)$.

A6. Найдите значение выражения: а) $\frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{10}}$; б) $\frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{14}}$.

A7. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{11} + 7)^2 - 14\sqrt{11}$; б) $(\sqrt{19} + 5)^2 - 10\sqrt{19}$.

A8. Найдите значение выражения: а) $\frac{18}{(3\sqrt{5})^2}$; б) $\frac{6}{(2\sqrt{3})^2}$.

A9. Найдите значение выражения: а) $\frac{25^{2,7}}{5^{3,4}}$; б) $\frac{9^{6,4}}{3^{9,8}}$.

A10. Найдите значение выражения: а) $\left(\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{3}}\right)^3$; б) $\left(\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{2}}\right)^3$.

Уровень В

B1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{96} + \sqrt{24} - \sqrt{216}$; б) $\sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{175}$.

B2. Найдите значение выражения:

а) $6\sqrt{2} - (\sqrt{8} - (\sqrt{50} - \sqrt{162}))$; б) $3\sqrt{2} - (\sqrt{50} - (\sqrt{32} - \sqrt{8}))$.

B3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{70} - \sqrt{6}}\sqrt{\sqrt{70} + \sqrt{6}}$; б) $\sqrt{\sqrt{26} - \sqrt{10}}\sqrt{\sqrt{26} + \sqrt{10}}$.

B4. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{99} + \sqrt{363} - 3\sqrt{11}}{33\sqrt{3}}$; б) $\frac{21\sqrt{7}}{\sqrt{147} + \sqrt{63} - 7\sqrt{3}}$.

B5. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{6,3}}{\sqrt{0,24}}$; б) $\frac{\sqrt{1,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,14}}$.

B6. Представьте в виде дроби с целым знаменателем выражение:

а) $\frac{37}{9 + \sqrt{7}}$; б) $\frac{29}{8 - \sqrt{6}}$.

В7. Сравните:

а) $\sqrt{152 \cdot 155} - 132$ и $\sqrt{154 \cdot 151} - 134$;

б) $\sqrt{216 \cdot 222} - 187$ и $\sqrt{221 \cdot 215} - 189$.

В8. Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:

а) $\sqrt{9651 \cdot 6519 \cdot 5196}$ и 575757 ;

б) $\sqrt{7651 \cdot 6517 \cdot 5176}$ и 518022 .

В9. Сравните:

а) $\frac{1}{119} + \frac{1}{125} + \frac{1}{137}$ и $\frac{1}{\sqrt{119}} + \frac{1}{\sqrt{125}} + \frac{1}{\sqrt{137}}$;

б) $\frac{1}{125} + \frac{1}{133} + \frac{1}{145}$ и $\frac{1}{\sqrt{125}} + \frac{1}{\sqrt{133}} + \frac{1}{\sqrt{145}}$.

В10. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{55} \cdot \sqrt{275} \cdot \sqrt{605}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{39} \cdot \sqrt{117} \cdot \sqrt{507}}$.

Уровень С

С1. Сократите дробь: а) $\frac{17 + 2\sqrt{30}}{\sqrt{15} + \sqrt{2}}$;

б) $\frac{16 - 2\sqrt{39}}{\sqrt{13} - \sqrt{3}}$.

С2. Сократите дробь: а) $\frac{23\sqrt{23} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{23} + \sqrt{2}}$;

б) $\frac{5\sqrt{5} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

С3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{83 + 18\sqrt{2}} - \sqrt{2}$;

б) $\sqrt{54 - 14\sqrt{5}} + \sqrt{5}$.

С4. Сравните:

а) $5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}}$ и $26^{\frac{1}{2}}$;

б) $6^{\frac{1}{2}} + 11^{\frac{1}{2}}$ и $37^{\frac{1}{2}}$.

С5. Сравните:

а) $\sqrt{19} + \sqrt{15}$ и $\sqrt{13} + \sqrt{21}$;

б) $\sqrt{17} + \sqrt{15}$ и $\sqrt{13} + \sqrt{19}$.

С6. Сравните:

а) $\sqrt{1,6} - \sqrt{8,1} + \sqrt{6,4}$ и $\frac{3\sqrt{10}}{10}$;

б) $\sqrt{8,1} - \sqrt{6,4} + \sqrt{1,6}$ и $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

С7. Между какими соседними целыми числами заключено значение выражения:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{20}+\sqrt{19}}$?

- С8.** Найдите все пары целых чисел $(m; n)$, для которых:
 а) $m + (3 + \sqrt{2})n = 3\sqrt{2}$; б) $(2 + \sqrt{3})m - n = 2\sqrt{3}$.
- С9.** Найдите все пары $(a; b)$ целых чисел a и b , для которых:
 а) $(a + 3b)\sqrt{3} = (a + b + 2)\sqrt{7}$; б) $(a + b + 4)\sqrt{5} = (3a - b)\sqrt{2}$.

1.4. Тригонометрические выражения

Уровень А

- A1.** Найдите значение выражения:
 а) $12\cos 60^\circ$; б) $-14\sin 30^\circ$.
- A2.** Найдите значение выражения:
 а) $-2\sqrt{3}\sin 60^\circ$; б) $3\sqrt{2}\cos 45^\circ$.
- A3.** Найдите значение выражения:
 а) $5\sqrt{3}\operatorname{tg} 30^\circ$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} 60^\circ$.
- A4.** Найдите значение выражения:
 а) $-42\cos 420^\circ$; б) $24\sqrt{2}\sin 405^\circ$.
- A5.** Найдите значение выражения:
 а) $10\sqrt{2}\sin(-765^\circ)$; б) $-14\sqrt{3}\sin 420^\circ$.
- A6.** Найдите значение выражения:
 а) $-18\sqrt{2}\cos(-405^\circ)$; б) $14\sqrt{2}\cos 855^\circ$.
- A7.** Найдите значение выражения:
 а) $42\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6}$; б) $44\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{3}$.
- A8.** Найдите значение выражения:
 а) $36\sqrt{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$; б) $2\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$.
- A9.** Найдите значение выражения:
 а) $\frac{46}{\sin(-\frac{27\pi}{4})\cos\frac{35\pi}{4}}$; б) $\frac{60}{\sin(-\frac{32\pi}{3})\cos\frac{25\pi}{6}}$.
- A10.** Найдите значение выражения:
 а) $-6(\sin^2 13^\circ + \cos^2 13^\circ)$; б) $\frac{8}{\cos^2 11^\circ + \sin^2 11^\circ}$.

Уровень В

В1. а) Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = 2$, $-\frac{17\pi}{2} < \alpha < -\frac{15\pi}{2}$. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.

б) Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = -4$, $\frac{7\pi}{2} < \alpha < \frac{9\pi}{2}$. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.

В2. а) Дано: $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$, $2\pi < \alpha < 3\pi$. Найдите $\sin \alpha + \cos \alpha$.

б) Дано: $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{5}$, $-3\pi < \alpha < -2\pi$. Найдите $\sin \alpha + \cos \alpha$.

В3. а) Дано: $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{11}$, $\frac{13\pi}{2} < \alpha < \frac{15\pi}{2}$. Найдите $\cos \alpha - \sin \alpha$.

б) Дано: $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{15}$, $-\frac{7\pi}{2} < \alpha < -\frac{5\pi}{2}$. Найдите $\cos \alpha - \sin \alpha$.

В4. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sin 21^\circ}{\sin 7^\circ} - \frac{\cos 21^\circ}{\cos 7^\circ}$;

б) $\frac{\cos 75^\circ}{\sin 15^\circ} + \frac{\sin 75^\circ}{\cos 15^\circ}$.

В5. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}$;

б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

В6. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sin 25^\circ + \sin 85^\circ}{2 \sin 415^\circ}$;

б) $\frac{\sin 40^\circ + \sin 130^\circ}{\cos 355^\circ}$.

В7. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sin^2 11^\circ + \sin^2 79^\circ}{\cos^2 53^\circ + \cos^2 37^\circ}$;

б) $\frac{\sin^2 8^\circ + \sin^2 82^\circ}{\cos^2 51^\circ + \cos^2 39^\circ}$.

В8. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\cos 27^\circ - \cos 117^\circ}{2 \sin 432^\circ}$;

б) $\frac{\cos 15^\circ - \cos 75^\circ}{\sin 405^\circ}$.

В9. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sin^3 35^\circ - \cos^3 35^\circ}{\sin 35^\circ - \cos 35^\circ} - \frac{\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ}{\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{ctg} 35^\circ}$;

б) $\frac{\sin^3 24^\circ - \cos^3 24^\circ}{\sin 24^\circ - \cos 24^\circ} - \frac{\sin^2 24^\circ + \cos^2 24^\circ}{\operatorname{tg} 24^\circ + \operatorname{ctg} 24^\circ}$.

В10. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2 \cos 13^\circ \cos 43^\circ - \cos 56^\circ}{2 \sin 58^\circ \cos 13^\circ - \sin 71^\circ}$;

б) $\frac{2 \cos 10^\circ \cos 70^\circ - \cos 80^\circ}{2 \sin 40^\circ \cos 10^\circ - \sin 50^\circ}$.

Уровень С

С1. Найдите значение выражения:

а) $\frac{4\sin 17^\circ \cos 17^\circ (2\cos 51^\circ \cos 17^\circ - \sin 34^\circ)}{\sin 104^\circ - \sin 34^\circ};$

б) $\frac{4\sin 13^\circ \cos 13^\circ (2\sin 39^\circ \cos 13^\circ - \sin 26^\circ)}{\cos 26^\circ - \cos 78^\circ}.$

С2. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{1+\cos 6}{2}} + \cos 3;$

б) $\sqrt{\frac{1-\cos 10}{2}} + \sin 5.$

С3. Найдите значение выражения:

а) $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \sin^4 \frac{5\pi}{12} + \sin^4 \frac{7\pi}{12} + \sin^4 \frac{11\pi}{12};$

б) $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{9\pi}{8}.$

С4. Сравните числа:

а) $\cos 14^\circ \cos 74^\circ$ и $\frac{1}{2};$

б) $\cos 10^\circ \cos 40^\circ$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

С5. Сравните числа:

а) $\sin^2 37^\circ + \cos^2 38^\circ$ и $\cos^2 37^\circ + \sin^2 38^\circ;$

б) $\sin^2 6^\circ + \cos^2 9^\circ$ и $\cos^2 6^\circ + \sin^2 9^\circ.$

С6. Сравните числа:

а) $\frac{\sin 112^\circ}{16\sin 7^\circ}$ и $\cos 7^\circ \cos 14^\circ \cos 28^\circ \cos 56^\circ;$

б) $\frac{\sin 256^\circ}{16\sin 16^\circ}$ и $\cos 16^\circ \cos 32^\circ \cos 64^\circ \cos 128^\circ.$

С7. Сравните числа:

а) $\frac{\sin 12^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 12^\circ - \sin 10^\circ}$ и $\frac{\operatorname{tg} 11^\circ}{\operatorname{tg} 1^\circ};$

б) $\frac{\sin 32^\circ + \sin 22^\circ}{\sin 32^\circ - \sin 22^\circ}$ и $\frac{\operatorname{tg} 27^\circ}{\operatorname{tg} 5^\circ}.$

С8. Сравните числа:

а) $\frac{\cos 17^\circ - \cos 29^\circ}{\cos 17^\circ + \cos 29^\circ}$ и $\operatorname{tg} 23^\circ \sin 6^\circ;$

б) $\frac{\cos 6^\circ - \cos 8^\circ}{\cos 6^\circ + \cos 8^\circ}$ и $\operatorname{tg} 7^\circ \sin 1^\circ.$

С9. Сравните числа:

а) $\sin(\cos 11^\circ)$ и $\cos(\sin 11^\circ);$

б) $\sin(\sin 13^\circ)$ и $\cos(\cos 13^\circ).$

C10. Сравните числа:

а) $\sin^{27}\left(\operatorname{tg}\frac{8\pi}{13}\right) + \cos^{17}\left(\operatorname{tg}\frac{8\pi}{13}\right)$ и 1,08;

б) $\sin^{23}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{11}\right) + \cos^9\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{11}\right)$ и 1,04.

1.5. Показательные выражения и степени с действительным показателем

Уровень А

A1. Найдите значение выражения:

а) $5^{\sqrt{5}} \cdot 5^{2-\sqrt{5}};$

б) $13^{\sqrt{13}} \cdot 13^{2-\sqrt{13}}.$

A2. Найдите значение выражения: а) $(5^{\sqrt{3}})^{-\sqrt{3}};$

б) $(10^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}.$

A3. Найдите значение выражения: а) $\frac{3^{\sqrt{8}}}{3^{\sqrt{8}-1}};$

б) $\frac{8^{\sqrt{3}}}{8^{\sqrt{3}-1}}.$

A4. Найдите значение выражения: а) $\frac{3^{\sqrt{6}} \cdot 7^{\sqrt{6}}}{21^{\sqrt{6}-2}};$

б) $\frac{4^{\sqrt{11}} \cdot 5^{\sqrt{11}}}{20^{\sqrt{11}-2}}.$

A5. Найдите значение выражения:

а) $(11^{\sqrt{11}-3})^{\sqrt{11}+3};$

б) $(5^{\sqrt{18}-4})^{\sqrt{18}+4}.$

A6. Найдите значение выражения:

а) $\left(18^{\frac{\sqrt{5}}{4}}\right)^{\frac{4}{\sqrt{5}}};$

б) $\left(23^{\frac{\sqrt{13}}{3}}\right)^{\frac{3}{\sqrt{13}}}.$

A7. Найдите значение выражения:

а) $\left(27^{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)^{\frac{4}{3\sqrt{7}}};$

б) $\left(16^{\frac{\sqrt{11}}{5}}\right)^{\frac{5}{4\sqrt{11}}}.$

A8. Найдите значение выражения:

а) $\frac{15^{\sqrt{15}+1}}{15^{\sqrt{15}-1}};$

б) $\frac{17^{\sqrt{17}+1}}{17^{\sqrt{17}-1}}.$

A9. Найдите значение выражения:

а) $3^{2-\sqrt{13}} \cdot 3^{2+\sqrt{13}};$

б) $12^{1-\sqrt{12}} \cdot 12^{1+\sqrt{12}}.$

A10. Найдите значение выражения:

а) $7^{7\sqrt{7}-1} \cdot 7^{1-\sqrt{7}} : 7^{6\sqrt{7}-1};$

б) $6^{6\sqrt{6}-1} \cdot 6^{1-\sqrt{6}} : 6^{5\sqrt{6}-1}.$

Уровень В

В1. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}};$ б) $\left(\frac{10\sqrt{2}-5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}}.$

В2. Найдите значение выражения:

а) $\frac{7^{2\sqrt{7}}-9}{7^{\sqrt{7}}+3}+7^{\sqrt{7}};$ б) $\frac{5^{2\sqrt{5}}-16}{5^{\sqrt{5}}+4}+5^{\sqrt{5}}.$

В3. Найдите значение выражения:

а) $\frac{25-4\sqrt{13}}{5-2\sqrt{13}}+\frac{9-4\sqrt{13}}{3+2\sqrt{13}};$ б) $\frac{16-9\sqrt{11}}{4-3\sqrt{11}}+\frac{49-9\sqrt{11}}{7+3\sqrt{11}}.$

В4. Найдите значение выражения:

а) $(3+2^{\sqrt{7}})^2-4^{0,5+\sqrt{7}}+(3-2^{\sqrt{7}})^2;$
б) $(5+4^{\sqrt{2}})^2-16^{0,25+\sqrt{2}}+(5-4^{\sqrt{2}})^2.$

В5. Найдите значение выражения:

а) $\frac{15\sqrt{19}-5\sqrt{19}}{12\sqrt{19}-4\sqrt{19}}-(1,25)^{\sqrt{19}};$ б) $\frac{21\sqrt{17}-3\sqrt{17}}{28\sqrt{17}-4\sqrt{17}}-(0,75)^{\sqrt{17}}.$

В6. Сравните числа: а) $3^{\sqrt{3}}$ и 9;

б) $2^{\sqrt{5}}$ и 4.

В7. Найдите значение выражения:

а) $|11^{\sqrt{3}}-121|-21+11^{\sqrt{3}};$ б) $|13^{\sqrt{5}}-169|+69-13^{\sqrt{5}}.$

В8. Сравните числа: а) $\sqrt{10}^{\sqrt{10}}$ и 27;

б) $\sqrt{15}^{\sqrt{15}}$ и 256.

В9. Сравните числа: а) $3^{\sqrt{10}}+7^{\sqrt{5}}$ и 76;

б) $2^{\sqrt{15}}+5^{\sqrt{3}}$ и 41.

В10. Найдите значение выражения:

а) $|7^{\sqrt{3}}-49|+|7^{\sqrt{3}}-7|;$ б) $|5^{\sqrt{5}}-24|+|5^{\sqrt{5}}-125|.$

Уровень С

С1. Найдите значение выражения:

а) $(2-\sqrt{3})^{\sqrt{5}-1}\cdot(\sqrt{3}+2)^{\sqrt{5}+1}\cdot(7-4\sqrt{3});$
б) $(\sqrt{5}-2)^{\sqrt{3}+1}\cdot(\sqrt{5}+2)^{\sqrt{3}-1}\cdot(9+4\sqrt{5}).$

С2. Найдите значение выражения:

а) $\left((\sqrt{3})^{2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt[3]{3})^{3\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}};$ б) $\left(\frac{(\sqrt{7})^{2\sqrt{7}}}{(\sqrt[3]{7})^{3\sqrt{6}}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{6}}.$

С3. Найдите значение выражения:

$$\text{а) } 2^{4,5\sqrt{3}-5} \cdot \left(\frac{3}{1+\sqrt{2}} - \frac{3}{1-\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} \right)^{2-2\sqrt{3}};$$

$$\text{б) } 5^{2-1,5\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{5}{2+\sqrt{5}} - \frac{5}{2-\sqrt{5}} \right)^{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \right)^{2-2\sqrt{5}}.$$

С4. Найдите значение выражения:

$$\text{а) } (2^{19})^{-5} \cdot \left(\frac{2^{(\sqrt{5}+2)^2}}{2^{(3-\sqrt{5})^2}} \right)^{2\sqrt{5}-1};$$

$$\text{б) } (2^{13})^3 \cdot \left(\frac{3^{(\sqrt{3}-1)^2}}{3^{(2+\sqrt{3})^2}} \right)^{2\sqrt{3}-1}.$$

С5. Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \left(\frac{1}{\sqrt{8}} \right)^6 \left(\frac{\left(\left(\sqrt[4]{2} \sqrt{2} \right)^4 \cdot \left(\sqrt[3]{2} \sqrt{3} \right)^3 \right)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{(\sqrt[3]{2})^{15}} \right)^{\sqrt{6}};$$

$$\text{б) } \left(\frac{1}{\sqrt{32}} \right)^{16} \left(\frac{\left(\left(\sqrt[6]{2} \sqrt{7} \right)^6 \right)^{\sqrt{7}-\sqrt{6}}}{\left(\left(\sqrt[5]{2} \sqrt{6} \right)^5 \right)} \cdot (\sqrt{2})^{26} \right)^{\frac{\sqrt{42}}{2}}.$$

С6. Сравните: а) $5^{(2\sqrt{3}-1)^2} \cdot (5^{\sqrt{12}})^2$ и 5^{12} ; б) $\frac{6^{(3\sqrt{2}+1)^2}}{(6^{\sqrt{18}})^2}$ и 6^{18} .

С7. Сравните: а) $2^{\sqrt{3}}$ и $3^{\sqrt{2}}$; б) $2^{\sqrt{5}}$ и $5^{\sqrt{2}}$.

С8. Сравните: а) $\sqrt{3}^{\sqrt{5}}$ и $\sqrt{5}^{\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{2}^{\sqrt{7}}$ и $\sqrt{7}^{\sqrt{2}}$.

С9. Сравните:

$$\text{а) } 8^{\sqrt{60}} \cdot \left(\frac{(8^{\sqrt{3}})^2}{8^{\sqrt{5}}} \right)^{2\sqrt{3}} \text{ и } 8^{12} + 8;$$

$$\text{б) } \frac{((9^{\sqrt{2}})^3 \cdot (9^{\sqrt{7}})^2)^{\sqrt{2}}}{9^{\sqrt{56}}} \text{ и } 3^{12} + 3.$$

С10. а) Вова и Витя играют в игру: Вова загадывает число x , такое, что $1 < x < 2$, а Витя возводит это число сначала в степень $\sqrt{3} + 0,5$, потом извлекает из результата квадратный корень, после чего снова возводит результат в степень $\sqrt{3} + 0,5$, извлекает из результата корень и т. д. Если в какой-то момент у Вити получилось число, большее 2, то Витя выиграл. Может ли Вова не дать Вите выиграть?

б) Маша и Даша играют в игру: Маша загадывает число x , такое, что $2 < x < 3$, а Даша возводит это число сначала в степень $\sqrt{5}$, потом извлекает из результата квадратный корень, после чего снова возводит результат в степень $\sqrt{5}$, извлекает из результата корень и т. д. Если в какой-то момент у Даши получилось число, большее 3, то Даша выиграла. Может ли Маша не дать Даше выиграть?

1.6. Логарифмы и логарифмические выражения

Уровень А

- A1.** Найдите значение выражения:
 а) $\log_3 1,8 + \log_3 5$; б) $\log_4 1,6 + \log_4 40$.
- A2.** Найдите значение выражения:
 а) $\log_6 432 - \log_6 12$; б) $\log_3 54 - \log_3 2$.
- A3.** Найдите значение выражения:
 а) $\log_4 2 + \log_{0,25} 8$; б) $\log_{25} 625 + \log_{0,04} 0,2$.
- A4.** Найдите значение выражения:
 а) $\log_{0,5} 32$; б) $\log_{0,5} 64$.
- A5.** Найдите значение выражения: а) $\frac{70}{8^{\log_8 5}}$; б) $\frac{35}{5^{\log_5 7}}$.
- A6.** Найдите значение выражения:
 а) $7^{2\log_7 4}$; б) $4^{-2\log_4 5}$.
- A7.** Найдите значение выражения:
 а) $\frac{\log_7(11^6)}{3\log_7 11}$; б) $\frac{\log_5(13^9)}{3\log_5 13}$.
- A8.** Найдите значение выражения:
 а) $2^{\log_2 6 - 3}$; б) $6^{\log_6 5 + 2}$.
- A9.** Найдите значение выражения:
 а) $\log_2(\log_2 16)$; б) $\log_3(\log_5 125)$.
- A10.** Найдите значение выражения:
 а) $\log_4 13 \cdot \log_{13} 16$; б) $\log_5 3 \cdot \log_3 125$.

Уровень В

- B1.** Найдите значение выражения: а) $\log_{3\sqrt{3}}(9\sqrt{3})$; б) $\log_{4\sqrt{2}}(8\sqrt{2})$.
- B2.** Найдите значение выражения: а) $9^{2 - \log_3 5}$; б) $4^{3 - \log_2 3}$.

B3. Найдите значение выражения:

а) $64^{\log_8 2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 8}$;

б) $64^{\log_8 3} - \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 8}$.

B4. Найдите значение выражения: а) $\frac{2^{\log_5 25}}{9^{\log_8 14}}$; б) $\frac{3^{\log_2 16}}{7^{\log_4 99}}$.

B5. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{25^{\log_5 6} - 4^{\log_4 32}}$;

б) $\sqrt[4]{49^{\log_7 5} - 3^{\log_3 9}}$.

B6. Найдите значение выражения:

а) $-\log_3 \log_9 \sqrt[27]{3\sqrt[3]{9}}$;

б) $-\log_4 \log_8 \sqrt[16]{4\sqrt[3]{8}}$.

B7. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{11})^{\log_{11} 25} + 6^{\log_{\sqrt{6}} 11}$;

б) $(\sqrt{19})^{\log_{19} 49} + 10^{\log_{\sqrt{10}} 11}$.

B8. Найдите значение выражения:

а) $32^{\log_{0.5} \sqrt[5]{45}}$;

б) $64^{\log_{0.25} \sqrt[3]{47}}$.

B9. Найдите значение выражения:

а) $9^{\frac{\log_3 5 + 2\log_1 4}{9}}$;

б) $4^{\frac{\log_2 5 + 4\log_1 3}{16}}$.

B10. Сравните числа:

а) $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$ и $3\log_8 35$;

б) $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$ и $5\log_{32} 26$.

Уровень С

C1. Найдите значение выражения:

а) $\log_{\frac{1}{2}} \log_{25} 5 - 9^{\frac{1}{\log_5 3}}$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} \log_{27} 3 - 16^{\frac{1}{\log_5 4}}$.

C2. Найдите значение выражения:

а) $6\lg(4 - 2\sqrt{3}) - 12\lg(\sqrt{3} - 1)$;

б) $5\lg(4 + 2\sqrt{3}) - 10\lg(\sqrt{3} + 1)$.

C3. Найдите значение выражения:

а) $2\log_2 \frac{32}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \log_2 (11 + 2\sqrt{30})$;

б) $2\log_3 \frac{9}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} + \log_3 (13 + 2\sqrt{42})$.

C4. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\log_3 12 + \log_4 12}{\log_3 12 \cdot \log_4 12};$

б) $\frac{\log_2 18 + \log_9 18}{\log_2 18 \cdot \log_9 18}.$

C5. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\log_3 153}{\log_{51} 3} - \frac{\log_3 459}{\log_{17} 3};$

б) $\frac{\log_2 176}{\log_{22} 2} - \frac{\log_2 352}{\log_{11} 2}.$

C6. Найдите значение выражения:

а) $(1 - \log_3 15)(1 - \log_5 15);$

б) $(1 - \log_4 36)(1 - \log_9 36).$

C7. Найдите значение выражения:

а) $\frac{13^{\log_{11} 3} \cdot 11^{\log_3 13} \cdot 3^{\log_{13} 11}}{13^{\log_{11} 11} \cdot 11^{\log_{13} 3} \cdot 3^{\log_{11} 13}};$

б) $\frac{19^{\log_{17} 5} \cdot 17^{\log_5 19} \cdot 5^{\log_{19} 17}}{19^{\log_{51} 17} \cdot 17^{\log_{19} 5} \cdot 5^{\log_{17} 19}}.$

C8. Найдите значение выражения:

а) $(21 - 2^{2 + \log_2 5}) \log_5 \sqrt[3]{3} \cdot \log_3 125;$

б) $(22 - 5^{1 + \log_5 4}) \log_2 \sqrt[4]{3} \cdot \log_3 16.$

C9. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\log_2 14}{\log_{28} 2} - \frac{\log_2 7}{\log_{56} 2};$

б) $\frac{\log_3 6}{\log_{18} 3} - \frac{\log_3 2}{\log_{54} 3}.$

C10. Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{1 + \log_2 11 + \log_2 13} + \frac{1}{1 + \log_{11} 2 + \log_{11} 13} + \frac{1}{1 + \log_{13} 2 + \log_{13} 11};$

б) $\frac{1}{1 + \log_3 5 + \log_3 13} + \frac{1}{1 + \log_5 3 + \log_5 13} + \frac{1}{1 + \log_{13} 3 + \log_{13} 5}.$

2.1. Целые алгебраические выражения

Уровень А

- A1.** Разложите на множители: а) $b^2 + 2b - 8$; б) $b^2 - 11b + 28$.
- A2.** Найдите значение выражения:
а) $(4a + 7)^2 - 16a^2 - 55a + 7$ при $a = 234$;
б) $(7a + 2)^2 - 49a^2 - 26a + 5$ при $a = 111$.
- A3.** Найдите значение выражения:
а) $(5x - 7)^2 - 25x^2 - 9$ при $x = 50$;
б) $(8x - 3)^2 - 64x^2 + 11$ при $x = 100$.
- A4.** Найдите значение выражения:
а) $(3n - 8)(3n + 8) - (3n - 8)^2$ при $n = 16$;
б) $(4n - 3)(4n + 3) - (4n - 3)^2$ при $n = 7$.
- A5.** Найдите значение выражения:
а) $(3d + 13)^2 - (3d - 13)^2$ при $d = 200$;
б) $(7d + 5)^2 - (7d - 5)^2$ при $d = 70$.
- A6.** Найдите значение выражения:
а) $(3n^5)^3 : (3n^8)^2$ при $n = 15$; б) $(5n^{10})^2 : (5n^7)^3$ при $n = 10$.
- A7.** Найдите значение выражения:
а) $(2a)^4 : a^9 \cdot a^6$ при $a = 6$; б) $(4a)^3 : a^{11} \cdot a^9$ при $a = 5$.
- A8.** В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6000 + 4100n$, где n — число колец, установленных при копании колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из
а) 4 колец; б) 6 колец.
- A9.** Площадь трапеции вычисляется по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b — основания трапеции, h — её высота. Пользуясь этой формулой, найдите S , если
а) $a = 3$, $b = 6$ и $h = 4$;
б) $a = 5$, $b = 3$ и $h = 6$.
- A10.** Мощность постоянного тока P (Вт) вычисляется по формуле $P = I^2 R$, где I — сила тока (А), R — сопротивление (Ом). Пользуясь этой формулой, найдите P (Вт), если
а) $R = 14$ Ом и $I = 4$ А;
б) $R = 7$ Ом и $I = 2$ А.

Уровень В

В1. Разложите на множители:

а) $x^2 - 8x + 7$;

б) $x^2 + 8x + 12$.

В2. Разложите на множители:

а) $2m^2 + 5m + 3$;

б) $4m^2 + 9m + 5$.

В3. Разложите на множители:

а) $-5x - 6x^2 + 4$;

б) $x - 10x^2 + 2$.

В4. Разложите на множители:

а) $12ax + 11by + 5(x - y) - 12ay - 11bx$;

б) $10ax + 13by - 7(x - y) - 10ay - 13bx$.

В5. Разложите на множители:

а) $x^8 - 5x^7 + 6x^6$;

б) $x^6 + 9x^5 + 20x^4$.

В6. а) Найдите $p(a)$, если $p(a - 3) = 8a + 11$.

б) Найдите $p(b)$, если $p(b - 5) = 7b + 12$.

В7. а) Найдите значение выражения $2x_1 + 3x_1x_2 + 2x_2$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 + 5x + 2 = 0$.

б) Найдите значение выражения $3x_1 + 2x_1x_2 + 3x_2$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$.

В8. а) Найдите значение выражения $x_1(4x_2 + 3) + x_2(4x_1 + 3)$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 + 5x - 1 = 0$.

б) Найдите значение выражения $x_1(3x_2 + 2) + x_2(3x_1 + 2)$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$.

В9. Найдите значение выражения:

а) $16a^2 - 24ab + 9b^2 - 4a + 3b$, если $a = \frac{3}{4}b$.

б) $9a^2 + 30ab + 25b^2 + 3a + 5b$, если $a = -\frac{5}{3}b$.

В10. а) Даны два многочлена

$$A(y) = 3y^2 + 4y - 1 \text{ и } B(y) = 4y - 5.$$

Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение $A(y) \cdot B(y)$.

б) Даны два многочлена

$$A(y) = 5y^2 - 4y + 3 \text{ и } B(y) = 3y + 4.$$

Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение $A(y) \cdot B(y)$.

Уровень С

- С1.** Разложите на множители:
а) $3x^2 - 11xy - 4y^2$;
б) $6y^2 + 11xy - 2x^2$.
- С2.** Найдите все пары чисел $(x; y)$, для каждой из которых равно нулю значение выражения:
а) $(x + y)^2 - 10x + 4y - 2xy + 29$;
б) $(x - y)^2 + 2x + 4y + 2xy + 5$.
- С3.** а) Может ли выражение $9x^4 - 48x^3 + 64x^2$ принимать отрицательные значения? Найдите значение этого выражения при $x = 2\frac{2}{3}$.
б) Может ли выражение $25x^4 - 90x^3 + 81x^2$ принимать отрицательные значения? Найдите значение этого выражения при $x = 1\frac{4}{5}$.
- С4.** Существуют ли значения x и y , при которых положительно значение выражения:
а) $-17x^2 + 56xy - 49y^2$; б) $-25x^2 + 10xy - 9y^2$?
- С5.** а) Найдите значение выражения $x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 - 4x - 2 = 0$.
б) Найдите значение выражения $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$, если x_1 и x_2 — два различных корня уравнения $x^2 - 6x - 3 = 0$.
- С6.** а) Значение выражения $ax + by$ при $x = 4$, $y = 6$ равно 72. Найдите значение этого выражения при $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{4}$.
б) Значение выражения $ax - by$ при $x = 3$, $y = 8$ равно 48. Найдите значение этого выражения при $x = \frac{1}{8}$, $y = \frac{1}{3}$.
- С7.** а) Представьте трёхчлен $36w^4 - 61w^2 + 25$ в виде произведения многочленов первой степени.
б) Представьте трёхчлен $25w^4 - 89w^2 + 64$ в виде произведения многочленов первой степени.
- С8.** Найдите наибольшее значение выражения:
а) $5x^2 + 4xy - 5y^2$, если $2x - y = 1$;
б) $x^2 - 4xy + y^2$, если $x - y = 3$.

- C9.** а) Не выполняя умножения многочленов $p(x) = 3 + 2x - 4x^3$ и $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 17$, найдите сумму всех коэффициентов многочлена, являющегося произведением $p(x) \cdot q(x)$.
 б) Не выполняя умножения многочленов $p(x) = 5 - 3x - x^2$ и $q(x) = x^4 + 11x^2 - x + 2$, найдите сумму всех коэффициентов многочлена, являющегося произведением $p(x) \cdot q(x)$.
- C10.** а) Чему равен коэффициент при x^{99} многочлена $(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-100)$?
 б) Чему равен коэффициент при x^{59} многочлена $(x+69)(x+68) \cdot \dots \cdot (x+10)$?

2.2. Дробно-рациональные алгебраические выражения

Уровень А

- A1.** Сократите дробь: а) $\frac{16x^2 - 25}{4x - 5}$; б) $\frac{49x^2 - 16}{7x + 4}$.
- A2.** Сократите дробь: а) $\frac{9x^2 + 6xy + y^2}{3x + y}$; б) $\frac{25x^2 - 10xy + y^2}{5x - y}$.
- A3.** Найдите значение выражения:
 а) $\frac{a^{38} \cdot a^{-15}}{a^{24}}$ при $a = 20$; б) $\frac{a^{56} \cdot a^{-24}}{a^{30}}$ при $a = 14$.
- A4.** Найдите значение выражения:
 а) $\frac{a^{-33} \cdot a^{-29}}{a^{-59}}$ при $a = 0,25$; б) $\frac{a^{-27} \cdot a^{-46}}{a^{-71}}$ при $a = 0,05$.
- A5.** Найдите $\frac{a}{b}$, если:
 а) $\frac{5a + 9b}{5b + 9a} = -3$; б) $\frac{7a + 8b}{7b + 8a} = 4$.
- A6.** Найдите значение выражения:
 а) $\frac{5a + 7b}{4a - b}$, если $\frac{a}{a+b} = \frac{4}{5}$; б) $\frac{9a + 4b}{8a - 5b}$, если $\frac{a}{a+b} = \frac{5}{6}$.
- A7.** Найдите значение выражения:
 а) $\frac{a^2 - 9b^2}{3ab} : \left(\frac{1}{3b} - \frac{1}{a} \right)$ при $a = 8\frac{4}{7}$, $b = 4\frac{1}{7}$;
 б) $\frac{a^2 - 81b^2}{9ab} : \left(\frac{1}{9b} - \frac{1}{a} \right)$ при $a = 2\frac{8}{17}$, $b = 9\frac{1}{17}$.

A8. Найдите значение выражения:

а) $(81b^2 - 4) \left(\frac{1}{9b-2} - \frac{1}{9b+2} \right) - 3b - 13$ при $b = 40$;

б) $(25b^2 - 16) \left(\frac{1}{5b-4} - \frac{1}{5b+4} \right) - 3b + 13$ при $b = 22$.

A9. Работа постоянного тока A (Дж) вычисляется по формуле

$$A = \frac{U^2 t}{R}, \text{ где } U \text{ — напряжение (В), } R \text{ — сопротивление (Ом),}$$

t — время (с). Пользуясь этой формулой, найдите A (Дж), если:

а) $t = 18$ с, $U = 7$ В и $R = 14$ Ом;

б) $t = 15$ с, $U = 6$ В и $R = 9$ Ом.

A10. Закон Кулона можно записать в виде $F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где F —

сила взаимодействия зарядов (Н), q_1 и q_2 — величины зарядов (Кл), k — коэффициент пропорциональности ($\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$), а r — расстояние между зарядами (м). Пользуясь формулой, найдите величину заряда q_1 (Кл), если:

а) $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, $q_2 = 0,0008$ Кл, $r = 6000$ м, а $F = 0,0008$ Н;

б) $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, $q_2 = 0,002$ Кл, $r = 400$ м, а $F = 0,07875$ Н.

Уровень В

B1. Сократите дробь: а) $\frac{x^{23}y^{23} + x^9y^{55}}{x^{15}y + xy^{33}}$; б) $\frac{x^{20}y^{20} + x^8y^{48}}{x^{13}y + xy^{29}}$.

B2. Сократите дробь: а) $\frac{20x^{21}y^{12} - 13x^{20}y^{13}}{20x^{17} - 13yx^{16}}$; б) $\frac{23x^{24}y^5 - 5x^{23}y^6}{23x^{15} - 5yx^{14}}$.

B3. Сократите дробь: а) $\frac{x^3 - 125y^3}{x - 5y}$; б) $\frac{216x^3 - y^3}{6x - y}$.

B4. Сократите дробь: а) $\frac{x^3 - 64y^3}{4y - x}$; б) $\frac{27x^3 - y^3}{y - 3x}$.

B5. Сократите дробь: а) $\frac{27x^3 + 8y^3}{9x^2 - 6xy + 4y^2}$; б) $\frac{8x^3 + 125y^3}{4x^2 - 10xy + 25y^2}$.

B6. Упростите: а) $\frac{6y^4x^3}{3z^4} : \frac{36y^5x^4}{21z^5}$; б) $\frac{5y^5x}{3z^9} : \frac{25y^6x^2}{12z^8}$.

B7. Упростите: а) $(7x - y) \cdot \frac{7y}{49x^2 - y^2}$; б) $(2x + y) \cdot \frac{5y}{4x^2 - y^2}$.

B8. Упростите: а) $\frac{3x-8}{x-y-2} - \frac{x-4y}{2+y-x}$;

б) $\frac{2x-21}{x-y-3} - \frac{5x-7y}{3+y-x}$.

B9. Упростите: а) $\frac{4x}{7y+2x} - \frac{2x-7y}{2x+7y}$;

б) $\frac{3x}{7y+4x} - \frac{11x+14y}{4x+7y}$.

B10. Упростите:

а) $(4x^2 - 25y^2) \left(\frac{1}{2x+5y} + \frac{1}{2x-5y} \right)$;

б) $(9x^2 - 16y^2) \left(\frac{1}{3x-4y} - \frac{1}{3x+4y} \right)$.

Уровень С

C1. Сократите дробь: а) $\frac{10y^2+9y-9}{6y^2+11y+3}$;

б) $\frac{9y^2-6y-8}{6y^2-5y-4}$.

C2. Сократите дробь: а) $\frac{2x^2+xy-6y^2}{3y-2x}$;

б) $\frac{3y^2+2xy-8x^2}{4x-3y}$.

C3. Сократите дробь: а) $\frac{4x^2-y^2+14y-49}{2x-y+7}$;

б) $\frac{36x^2-y^2-12y-36}{6x+y+6}$.

C4. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5a+7b}{b}$, если значение выражения $\frac{7a+5b}{a}$ равно 8;

б) $\frac{3a+5b}{b}$, если значение выражения $\frac{5a+3b}{a}$ равно 6.

C5. а) Значение выражения $\frac{ax-by}{xy}$ при $x=2$, $y=5$ равно 14. Найдите значение этого выражения при $x=4$, $y=10$.

б) Значение выражения $\frac{xy}{ax+by}$ при $x=3$, $y=4$ равно 5. Найдите значение этого выражения при $x=9$, $y=12$.

C6. а) Найдите все значения, которые может принимать выражение $\frac{b}{a}$, если $a \neq 0$ и $2a^2+3ab-20b^2=0$.

б) Найдите все значения, которые может принимать выражение $\frac{a}{b}$, если $b \neq 0$ и $4b^2-13ab+3a^2=0$.

C7. Найдите все значения, которые может принимать выражение $\frac{x}{y}$, если: а) $\frac{10x^2-13xy+3y^2}{2x^2-3y^2}=4$; б) $\frac{9x^2-8xy-3y^2}{2x^2-3y^2}=2$.

С8. Найдите все целые значения n , при каждом из которых является целым числом значение выражения:

а) $\frac{6n-2}{2n+3}$;

б) $\frac{8n+7}{4n+5}$.

С9. На какое наибольшее натуральное число можно сократить данную дробь, если известно, что она сократима и n — целое

число: а) $\frac{7n+2}{13n+1}$; б) $\frac{4n-3}{5-2n}$.

С10. Найдите наибольшее значение данного выражения и укажите значения x и y , при которых оно достигается:

а) $\frac{12}{(2x-y+3)^2 + |x+6y-5| + 3}$;

б) $\frac{20}{(x+2y+5)^2 + |x-y-4| + 4}$.

2.3. Иррациональные алгебраические выражения

Уровень А

А1. Сократите дробь: а) $\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{2a}}$;

б) $\frac{a\sqrt{35}}{\sqrt{5a}}$.

А2. Сократите дробь: а) $\frac{x-196}{\sqrt{x}+14}$;

б) $\frac{x-256}{\sqrt{x}-16}$.

А3. Найдите значение выражения:

а) $\frac{m^{6,7}}{m^{4,7}}$ при $m = 7$;

б) $\frac{m^{5,1}}{m^{3,1}}$ при $m = 6$.

А4. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{m}}{20\sqrt{m} \cdot \sqrt[5]{m}}$ при $m = 16$;

б) $\frac{\sqrt{m}}{42\sqrt{m} \cdot \sqrt[7]{m}}$ при $m = 27$.

А5. Найдите значение выражения:

а) $x\left(\frac{4\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x}}{x}\right)$ при $x = 0,3$;

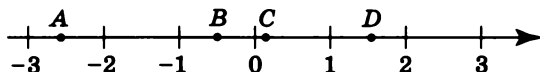
б) $x\left(\frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right)$ при $x = 0,4$.

А6. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt[4]{94n}}{n^4\sqrt[4]{n}}$ при $n = 0,3$;

б) $\frac{a\sqrt[3]{64\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{3a}}$ при $a = 0,7$.

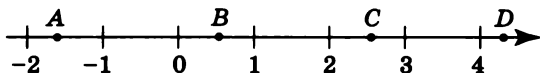
A7. а) На координатной прямой отмечены точки A , B , C и D .



Число m равно $\sqrt{0,15}$. Установите соответствие между указанными точками и числами, которые им соответствуют.

Точки	A	B	C	D
Числа	1) $-\frac{1}{m}$	2) m^2	3) $4m$	4) $m - 1$

б) На координатной прямой отмечены точки A , B , C и D .



Число m равно $-\sqrt{0,5}$. Установите соответствие между указанными точками и числами, которые им соответствуют.

Точки	A	B	C	D
Числа	1) $\sqrt{6-m}$	2) $m - 1$	3) m^2	4) $-\frac{3}{m}$

A8. а) Число m равно $\sqrt{2,2}$. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками.

Числа	А) $3 + m$	Б) $\frac{2}{m}$	В) $\sqrt{2-m}$	Г) m^2
Отрезки	1) $[0; 1]$	2) $[1; 2]$	3) $[2; 3]$	4) $[4; 5]$

б) Число m равно $\sqrt{0,5}$. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками.

Числа	А) $\sqrt{6+m}$	Б) $-m - 1$	В) m^2	Г) $\frac{3}{m}$
Отрезки	1) $[-2; -1]$	2) $[0; 1]$	3) $[2; 3]$	4) $[4; 5]$

A9. Среднее геометрическое трёх чисел a , b и c вычисляется по формуле $g = \sqrt[3]{abc}$. Вычислите среднее геометрическое чисел:

- а) 4, 8, 16; б) 9, 12, 16.

- A10.** Площадь треугольника со сторонами a , b , c можно найти по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$. Найдите площадь треугольника, если длины его сторон равны:
а) 7, 15, 20; б) 11, 13, 20.

Уровень В

- B1.** а) Выразите переменную u из формулы $z = \frac{5\sqrt{u+v}}{2w-1}$.
б) Выразите переменную v из формулы $z = \frac{3\sqrt{u-v}}{5w-3}$.
- B2.** Сократите дробь: а) $\frac{36a^2 - 25b}{6a + 5\sqrt{b}}$; б) $\frac{49a^2 - 16b}{7a + 4\sqrt{b}}$.
- B3.** Сократите дробь: а) $\frac{\sqrt{(x+3)(y+5)}}{\sqrt{-3-x}}$; б) $\frac{\sqrt{(x+5)(y+4)}}{\sqrt{-5-x}}$.
- B4.** Сократите дробь: а) $\frac{\sqrt{16a^2 - 81}}{\sqrt{9-4a}}$; б) $\frac{\sqrt{64a^2 - 9}}{\sqrt{3-8a}}$.
- B5.** Сократите дробь: а) $\frac{36+x}{6-\sqrt{-x}}$; б) $\frac{64+x}{8-\sqrt{-x}}$.
- B6.** Сократите дробь: а) $\frac{x+121}{\sqrt{-x}+11}$; б) $\frac{x+169}{\sqrt{-x}+13}$.
- B7.** Упростите:
а) $x + \sqrt{(x-11)^2}$, если $x < 11$;
б) $x - \sqrt{(12-x)^2}$, если $x > 12$.
- B8.** Сократите дробь: а) $\frac{34\sqrt{x} - x\sqrt{34}}{\sqrt{x} - \sqrt{34}}$; б) $\frac{46\sqrt{x} - x\sqrt{46}}{\sqrt{x} - \sqrt{46}}$.
- B9.** Упростите:
а) $\frac{x+6\sqrt{x}-16}{\sqrt{x}+8} + 2$; б) $\frac{x-6\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+1} + 7$.
- B10.** Упростите:
а) $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$; б) $\frac{x-16}{\sqrt{x}-4} - \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Уровень С

С1. Упростите:

а) $2\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-5} + \frac{1}{\sqrt{x}+5}\right) - \frac{100}{x-25}$; б) $3\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+4}\right) - \frac{96}{x-16}$.

С2. Упростите:

а) $(x-16y):\left(\frac{4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y}}\right) + 4\sqrt{y}$;

б) $(9x-y):\left(\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{xy}}{\sqrt{y}}\right) - 3\sqrt{x}$.

С3. Упростите:

а) $\frac{3\sqrt{x^2y} - x\sqrt{25y}}{\sqrt{64x^4y^3}}$, если $x < 0$; б) $\frac{4\sqrt{x^2y} + x\sqrt{9y}}{\sqrt{x^4y^3}}$, если $x < 0$.

С4. Упростите:

а) $\sqrt{(2-x)^2} + \sqrt{(6-x)^2}$, если $3 \leq x \leq 5$;

б) $\sqrt{(4-x)^2} + \sqrt{(10-x)^2}$, если $5 \leq x \leq 9$.

С5. Упростите:

а) $\frac{36x-1}{36x-12\sqrt{x}+1} - \frac{2}{6\sqrt{x}-1}$; б) $\frac{x-9}{x-6\sqrt{x}+9} - \frac{6}{\sqrt{x}-3}$.

С6. Упростите:

а) $(5a + 2\sqrt{15ab} + 6b)(5a - 2\sqrt{15ab} + 6b)$;

б) $(2a - 2\sqrt{7ab} + 7b)(2a + 2\sqrt{7ab} + 7b)$.

С7. Найдите:

а) $\sqrt{b+30}$, если $\sqrt{b-30} = 2$; б) $\sqrt{b+28}$, если $\sqrt{b-28} = 5$.

С8. а) Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{c+b} + \sqrt{c-b})^2}{2} + b$, если b и

c — соответственно длины катета и гипотенузы прямоугольного треугольника, периметр которого равен 5.

б) Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{c-b} + \sqrt{c+b})^2}{2} + b$, если b и

c — соответственно длины катета и гипотенузы прямоугольного треугольника, периметр которого равен 11.

С9. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+81}$; б) $\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+25}$.

С10. а) Найдите наибольшее значение выражения $12 - \sqrt{x^2 + y^2 + 121}$.

б) Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + y^2 + 144} - 13$.

2.4. Тригонометрические выражения

Уровень А

А1. а) Найдите $\cos x$, если $\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $270^\circ < x < 360^\circ$.

б) Найдите $\sin x$, если $\cos x = \frac{\sqrt{21}}{5}$ и $0^\circ < x < 90^\circ$.

А2. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если

а) $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; **б)** $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

А3. б) Найдите $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,6$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;

а) Найдите $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,8$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

А4. б) Найдите $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;

а) Найдите $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

А5. Упростите выражение:

а) $-5\cos(\pi - \beta) + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$; **б)** $4\sin(\pi - \beta) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$.

А6. Упростите выражение:

а) $-7\operatorname{tg}(5\pi + \alpha) - 5\operatorname{tg}(-\alpha)$; **б)** $\operatorname{tg}(3\pi + \beta) - 3\operatorname{tg}(-\beta)$.

А7. Найдите:

а) $-2\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = 0,6$; **б)** $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,1$.

А8. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле

$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin \alpha$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхуголь-

ника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S , если:

а) $d_1 = 6$, $d_2 = 12$, $\sin \alpha = \frac{5}{9}$; **б)** $d_1 = 6$, $d_2 = 14$, $\sin \alpha = \frac{6}{7}$.

A9. Теорему синусов можно записать в виде $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, где a

и b — две стороны треугольника, а α и β — углы треугольника, лежащие против этих сторон соответственно. Пользуясь этой формулой, найдите a , если:

а) $b = 24$, $\sin \alpha = \frac{1}{12}$ и $\sin \beta = \frac{1}{7}$; б) $b = 9$, $\sin \alpha = \frac{1}{6}$ и $\sin \beta = \frac{1}{2}$.

A10. Теорему косинусов можно записать в виде $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, где

a , b и c — стороны треугольника, а γ — угол между сторонами a и b . Пользуясь этой формулой, найдите величину $\cos \gamma$, если:

а) $a = 5$, $b = 8$ и $c = 7$;

б) $a = 5$, $b = 8$ и $c = 9$.

Уровень В

B1. Сократите дробь: а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$;

б) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos \alpha}$.

B2. Сократите дробь: а) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$;

б) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

B3. Найдите $\cos 2\alpha$, если: а) $\sin^2 \alpha = 0,55$;

б) $\sin^2 \alpha = 0,65$.

B4. Найдите $\cos 2\alpha$, если:

а) $3\cos^2 \alpha = 5\sin^2 \alpha$;

б) $6\sin^2 \alpha = 4\cos^2 \alpha$.

B5. Найдите $\cos 2\alpha$, если:

а) $\cos^4 \alpha = \sin^4 \alpha + 0,7$;

б) $\sin^4 \alpha = \cos^4 \alpha + 0,6$.

B6. Сократите дробь: а) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$;

б) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$.

B7. Сократите дробь: а) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}$;

б) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}$.

B8. Сократите дробь: а) $\frac{\cos\left(3\alpha - \frac{21\pi}{4}\right)}{\sin\left(3\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)}$;

б) $\frac{\sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(2\alpha + \frac{21\pi}{4}\right)}$.

B9. Сократите дробь:

а) $\frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$;

б) $\frac{2\cos^2 \alpha - \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

B10. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha + 3}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \sin 2\alpha + 1}; \quad \text{б) } \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha + 1}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + \sin 2\alpha - 3}.$$

Уровень С

C1. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{(\sin 2\alpha - 1)(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\cos 2\alpha}; \quad \text{б) } \frac{\cos 2\alpha}{(1 + \sin 2\alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}.$$

C2. Найдите $\sin \alpha \cos \alpha$, если:

$$\text{а) } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

C3. Найдите $\sin \alpha \cos \alpha$, если:

$$\text{а) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = -8; \quad \text{б) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 9.$$

C4. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если:

$$\text{а) } \frac{4\sin \alpha - 3\cos \alpha}{3\sin \alpha + 2\cos \alpha} = 3; \quad \text{б) } \frac{4\sin \alpha + \cos \alpha}{5\sin \alpha - 3\cos \alpha} = 2.$$

C5. Найдите $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если:

$$\text{а) } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{3}.$$

C6. Найдите $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, если:

$$\text{а) } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{2};$$

$$\text{б) } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{2}{3}.$$

C7. Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \frac{\cos\left(\frac{34\pi}{4} - \frac{\alpha}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{12} - \frac{41\pi}{4}\right)}, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{12} = \frac{1}{12};$$

$$\text{б) } \frac{\cos\left(\frac{35\pi}{4} - \frac{12\alpha}{11}\right)}{\cos\left(\frac{12\alpha}{11} - \frac{33\pi}{4}\right)}, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{12\alpha}{11} = \frac{12}{11}.$$

C8. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha} - \operatorname{tg} 6\alpha + 1;$$

$$\text{б) } \frac{\sin 4\alpha + \sin 7\alpha + \sin 10\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 7\alpha + \cos 10\alpha} - \operatorname{tg} 7\alpha - 1.$$

С9. а) Упростите выражение $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 15\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} - 27\alpha\right)}{\cos^2(2\pi - 4\alpha) + \cos^2\left(10\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$ и найдите его

значение при $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

б) Упростите выражение $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 21\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{2} - 15\alpha\right)}{\cos^2(3\pi - 4\alpha) + \cos^2\left(-2\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)}$ и найдите его

значение при $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

С10. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{5}$ и $\frac{13\pi}{2} < \alpha < \frac{15\pi}{2}$;

б) $\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{5}$ и $-\frac{13\pi}{2} < \alpha < -\frac{11\pi}{2}$.

2.5. Показательные выражения

Уровень А

А1. Найдите значение выражения:

а) $x \cdot 2^{7-3x}$ при $x = 3$; б) $x \cdot 4^{9-2x}$ при $x = 5$.

А2. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2^{16-3x} \cdot 8^{x-5}}{x}$ при $x = 20$;

б) $x \cdot 6^{3-2x} \cdot 36^{x-1}$ при $x = -15$.

А3. Найдите значение выражения:

а) $x \cdot 4^{-4x-1} \cdot 16^{2x}$ при $x = 4$;

б) $x \cdot 3^{3x+2} \cdot 27^{-x}$ при $x = 5$.

А4. Найдите значение выражения:

а) $(b^{\sqrt{3}})^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, если $b = 9$;

б) $(b^{\sqrt{6}})^{\frac{\sqrt{6}}{5}}$, если $b = 32$.

А5. Найдите значение выражения:

а) $\frac{x \cdot 2^{x+1} \cdot 3^{x+3}}{6^x}$ при $x = -2$;

б) $\frac{7^{x+2} \cdot 3^{x+1}}{x \cdot 21^x}$ при $x = -3$.

А6. Сократите дробь: а) $\frac{3^x \cdot 3^{3x-5}}{9^{2x-3}}$;

б) $\frac{4^x \cdot 4^{5x-7}}{16^{3x-4}}$.

A7. Сократите дробь:

а) $\frac{5^{x+7} \cdot 8^{x+6} \cdot 9^{x+5}}{360^{x+5}};$

б) $\frac{3^{x+5} \cdot 5^{x+4} \cdot 8^{x+6}}{120^{x+4}}.$

A8. Найдите значение выражения:

а) $5^{3x+2} : 125^x : x$ при $x = \frac{5}{8};$

б) $2^{3x+4} : 8^x : x$ при $x = \frac{2}{15}.$

A9. Сократите дробь:

а) $\frac{x^{8\sqrt{5}+1}}{(x^{\sqrt{5}})^9};$

б) $\frac{x^{4\sqrt{3}+2}}{(x^{\sqrt{3}})^4}.$

A10. а) Найдите $f(5)$, если $3f(x+7) + 5f(3-x) = 8 \cdot 7^{-x}.$

б) Найдите $f(4)$, если $3f(x+2) + 2f(6-x) = 5 \cdot 2^{4-x}.$

Уровень В

B1. Сократите дробь: а) $\frac{64^x - 36}{8^x + 6};$

б) $\frac{81^x - 4}{9^x + 2}.$

B2. Сократите дробь: а) $\frac{25^x - 16^x}{5^x + 4^x};$

б) $\frac{49^x - 9^x}{7^x + 3^x}.$

B3. Сократите дробь: а) $\frac{169^x + 13^x}{13^x + 1};$

б) $\frac{144^x + 12^x}{12^x + 1}.$

B4. Сократите дробь: а) $\frac{36^x + 7 \cdot 4^x}{9^x + 7};$

б) $\frac{24^x + 5 \cdot 8^x}{3^x + 5}.$

B5. Сократите дробь: а) $\frac{42^x + 48^x}{14^x + 16^x};$

б) $\frac{40^x + 56^x}{20^x + 28^x}.$

B6. Сократите дробь: а) $\frac{3^{x+1} + 3^{x+2}}{4^{x+2} - 4^{x+1}};$

б) $\frac{4^{x+1} + 4^{x+2}}{5^{x+2} - 5^{x+1}}.$

B7. Сократите дробь:

а) $\frac{3^{x+1} + 3^{x+3} + 3^{x+2}}{5^{x+2} + 14 \cdot 5^x};$

б) $\frac{4^{x+1} + 4^{x+2} + 4^{x+3}}{7^{x+2} + 35 \cdot 7^x}.$

B8. а) Упростите выражение $g(2x) - 6g^2(x)$, если $g(x) = \frac{4^x + 4^{-x}}{6}.$

б) Упростите выражение $g(2x) - 2g^2(x)$, если $g(x) = \frac{7^x + 7^{-x}}{2}.$

- B9.** а) Упростите выражение $f(2x) - 8g^2(x)$, если $g(x) = \frac{5^x - 5^{-x}}{8}$ и $f(x) = \frac{5^x + 5^{-x}}{8}$.
- б) Упростите выражение $f(2x) - 14g^2(x)$, если $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{14}$ и $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{14}$.
- B10.** а) Найдите значение выражения $(6^a - 6) \cdot 6^a$, если $6^a - 6^{-a} = 6$.
- б) Найдите значение выражения $(4^a - 4) \cdot 4^a$, если $4^a + 4^{-a} = 4$.

Уровень С

- C1.** Сократите дробь: а) $\frac{36^x + 2 \cdot 54^x + 81^x}{18^x + 27^x}$; б) $\frac{16^x + 2 \cdot 40^x + 100^x}{8^x + 20^x}$.
- C2.** Сократите дробь:
 а) $\frac{25^x + 3 \cdot 15^x + 2 \cdot 9^x}{5^x + 2 \cdot 3^x}$; б) $\frac{64^x + 4 \cdot 56^x + 3 \cdot 49^x}{8^x + 3 \cdot 7^x}$.
- C3.** а) Найдите $f(2)$, если $f(x) = \left(\frac{2^{3^2} (2^3)^2}{(2^{3^2})^2} \right)^{-x}$;
- б) Найдите $f(-1)$, если $f(x) = \left(\frac{3^{3^2} (3^3)^2}{(3^{3^2})^2} \right)^{-x}$.
- C4.** Найдите значение выражения:
 а) 2^{a-b} , если $\frac{2^a + 4 \cdot 2^b}{2^a - 2 \cdot 2^b} = -7$; б) 7^{a-b} , если $\frac{7^a + 3 \cdot 7^b}{7^a + 7^b} = 2$.
- C5.** а) Сравните $f(160)$ и $g(240)$, если $f(x) = 5^x$, $g(x) = 3^x$.
 б) Сравните $f(270)$ и $g(450)$, если $f(x) = 5^x$, $g(x) = 4^x$.
- C6.** а) Сравните $f(61)$ и $g(76)$, если $f(x) = 6^x$ и $g(x) = 4^x$.
 б) Сравните $f(33)$ и $g(41)$, если $f(x) = 6^x$ и $g(x) = 4^x$.
- C7.** а) Расположите числа $f(44)$, $g(33)$, $h(22)$ в порядке убывания, если $f(x) = 7^x$, $g(x) = 8^x$, $h(x) = 9^x$.
 б) Расположите числа $f(60)$, $g(45)$, $h(30)$ в порядке возрастания, если $f(x) = 5^x$, $g(x) = 7^x$, $h(x) = 3^x$.
- C8.** а) Найдите значение выражения $(5 - 5^{2x})^2 \cdot 5^{-x} + (5 - 5^{-2x})^2 \cdot 5^x$, если $5^x + 5^{-x} = 5$.
 б) Найдите значение выражения $(4 + 2^{2x})^2 \cdot 2^{-x} + (4 + 2^{-2x})^2 \cdot 2^x$, если $2^x + 2^{-x} = 4$.

С9. а) Вычислите $f(11) - f(-11)$, если

$$f(x) = \left(\left(\frac{3^x - 5^x}{5^x} \right)^2 - \frac{(3^x + 5^x)^2 - 8 \cdot 15^x}{25^x - 15^x} \right)^2 \cdot \frac{5^{4x}}{9 \cdot 225^x - 6 \cdot 3^{3x} \cdot 5^x + 3^{4x}}.$$

б) Вычислите $f(-4) - f(4)$, если

$$f(x) = \left(\left(\frac{7^x - 2^x}{2^x} \right)^2 - \frac{(7^x - 2^x)^2 - 4 \cdot 14^x}{4^x - 14^x} \right)^2 \cdot \frac{2^{4x}}{9 \cdot 196^x - 6 \cdot 7^{3x} \cdot 2^x + 7^{4x}}.$$

С10. а) Сравните числа $f\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $f\left(-\frac{7}{9}\right)$, если

$$f(x) = \frac{\left(\frac{5}{14}\right)^x - 9}{\left(\frac{5}{14}\right)^x - 3\left(\frac{5}{14}\right)^{0,5x} + 9} : \frac{\left(\frac{5}{14}\right)^{0,5x} - 3}{\left(\frac{5}{14}\right)^{1,5x} + 27} - \frac{6}{\left(\frac{5}{14}\right)^{-0,5x}} - 9.$$

б) Сравните числа $f\left(-\frac{7}{12}\right)$ и $f\left(-\frac{2}{7}\right)$, если

$$f(x) = \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^x - 9}{\left(\frac{2}{7}\right)^x + 3\left(\frac{2}{7}\right)^{0,5x} + 9} : \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^{0,5x} + 3}{\left(\frac{2}{7}\right)^{1,5x} - 27} + \frac{6}{\left(\frac{2}{7}\right)^{-0,5x}} - 9.$$

2.6. Логарифмические выражения

Уровень А

А1. Найдите:

а) $\log_a(ab)$, если $\log_a b = 17$;

б) $\log_a(a^3 b)$, если $\log_a b = 6$.

А2. Найдите:

а) $\log_a \frac{a^5}{b}$, если $\log_a b = -6$;

б) $\log_a \frac{a}{b^5}$, если $\log_a b = -11$.

А3. Найдите значение выражения:

а) $\log_b^2 a^5$, если $\log_b a = 4$;

б) $\log_b^2 a^7$, если $\log_b a = 3$.

А4. Найдите:

а) $\log_a(a^7 b^8)$, если $\log_a b = -13$;

б) $\log_a(a^8 b^{10})$, если $\log_a b = -6$.

A5. Найдите значение выражения:

а) $\log_{d^4} c^5$, если $\log_d c = \frac{18}{5}$; б) $\log_{d^8} c^7$, если $\log_d c = \frac{16}{7}$.

A6. Найдите значение выражения:

а) $\log_b \sqrt[6]{a^5}$, если $\log_b a = 3$; б) $\log_b \sqrt[8]{a^4}$, если $\log_b a = 7$.

A7. Найдите значение выражения:

а) $\log_a \sqrt[7]{\frac{a}{b}}$, если $\log_a b = 8$; б) $\log_a \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, если $\log_a b = 5$.

A8. Найдите значение выражения:

а) $\frac{4\log_d c}{\log_d a}$, если $\log_c a = \frac{4}{5}$; б) $\frac{5\log_d c}{\log_d a}$, если $\log_c a = \frac{5}{9}$.

A9. Найдите значение выражения:

а) $\log_{\sqrt{6}} k + \log_6 k^5 + 3$, если $\log_6 k = 2$;
б) $\log_{\sqrt{7}} k + \log_7 k^4 + 1$, если $\log_7 k = 7$.

A10. Найдите значение выражения:

а) $\log_b(d^8 a^2)$, если $\log_b d = -5$ и $\log_b a = -8$;
б) $\log_b(d^7 a^3)$, если $\log_b d = -1$ и $\log_b a = -7$.

Уровень В

B1. Сократите дробь: а) $\frac{\log_y x^3}{\log_{y^5} x}$; б) $\frac{\log_y x^5}{\log_{y^3} x}$.

B2. Сократите дробь: а) $\frac{\log_b^3 a^2}{\log_{b^3}^2 a}$; б) $\frac{\log_b^2 a^3}{\log_{b^3}^2 a}$.

B3. Сократите дробь: а) $\frac{\log_{y^3}^2 x^4}{\log_{y^2} x^3}$, б) $\frac{\log_{y^4} x^3}{\log_{y^3}^2 x^2}$.

B4. Сократите дробь: а) $\frac{\log_3 x \cdot \log_y 3}{\log_y x^2}$; б) $\frac{\log_x 5 \cdot \log_5 y}{\log_x y^4}$.

B5. Найдите значение выражения:

а) $\log_a(a+1) \cdot \log_{a+1}(a+2)$, если $\log_{a+2} a = \frac{4}{3}$;

б) $\log_{a+1} a \cdot \log_{a+2}(a+1)$, если $\log_a(a+2) = \frac{4}{5}$.

В6. Найдите значение выражения:

а) $\log_{b^3} a \cdot \log_c b^5 \cdot \log_{d^7} c$, если $\log_a d = \frac{7}{6}$;

б) $\log_b a^3 \cdot \log_{c^5} b \cdot \log_d c^7$, если $\log_a d = \frac{2}{21}$.

В7. Сократите дробь: а) $\frac{\log_b 2(-a)^3}{\log_{(-b)} a^2}$; б) $\frac{\log_{(-b)} a^4}{\log_{b^4}(-a)}$.

В8. Сократите дробь: а) $\frac{\log_b a^4 - \log_b(-a)}{2\log_b|a|}$; б) $\frac{\log_b a^2 + \log_b(-a)}{4\log_b|a|}$.

В9. Сократите дробь: а) $\frac{\log_c \frac{a}{b} + \log_c(-b)}{\log_{\sqrt[3]{c}}|a|}$; б) $\frac{\log_c ab - \log_c(-a)}{\log_{\sqrt{c}}|b|}$.

В10. а) Сравните числа $f(2)$ и $g(2)$, если $f(x) = \log_{x+1}(x+6)$, а $g(x) = \log_x(x+3)$.

б) Сравните числа $f(4)$ и $g(4)$, если $f(x) = \log_{x+1}(x+22)$, а $g(x) = \log_x(x+11)$.

Уровень С

С1. Сократите дробь: а) $\frac{\log_a(x-y)^8}{\log_a(y-x)}$; б) $\frac{\log_a(x-y)^7}{\log_a|y-x|}$.

С2. Сократите дробь:

а) $\frac{\log_7(7a) \cdot \log_a(7a)}{\log_7 a + \log_a 7 + 2}$; б) $\frac{\log_{13} b + \log_b 13 + 2}{\log_{13}(13b) \cdot \log_b(13b)}$.

С3. Упростите:

а) $5\log_c(a^2 - b^2) - 2\log_c|a - b| - 3\log_c(b - a)$;

б) $7\log_c(a^2 - b^2) - 3\log_c|a + b| - 4\log_c(-a - b)$.

С4. Упростите:

а) $\log_b(a^2 - 3a + 2) - \log_b|a - 2| - \log_b(1 - a)$;

б) $\log_b(a^2 - 4a + 3) - \log_b|a - 1| - \log_b(3 - a)$.

С5. Упростите:

а) $\log_c(a^2 - 8ab + 12b^2) - \log_b|a - 2b| - \log(6b - a)$;

б) $\log_c(a^2 - 7ab + 10b^2) - \log_b|a - 5b| - \log_b(2b - a)$.

С6. Найдите значение выражения:

а) $\log_b \frac{a^3}{\sqrt{5+\sqrt{7}}} + 4\log_{\sqrt[3]{b}}(2\sqrt{35} + 12)$, если $\log_a b = 0,2$;

б) $\log_b \frac{a^5}{\sqrt{3+\sqrt{11}}} + 2\log_{\sqrt[4]{b}}(2\sqrt{33} + 14)$, если $\log_a b = 0,4$.

C7. Упростите:

а) $(7 - \log_a(a^7b))(13 - \log_b(ab^{13}));$

б) $(5 - \log_a(a^5b))(17 - \log_b(ab^{17})).$

C8. Найдите наименьшее возможное значение выражения при $a > 1, b > 1$:

а) $3\log_b a + 12\log_a b + 15;$

б) $4\log_b a + 9\log_a b + 13.$

C9. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

а) $\log_2(4 - 4b^2 + 4ab - a^2) + \log_7(10b - b^2 - 18);$

б) $\log_3(9 - 4a^2 - 4ab - b^2) + \log_7(12a - a^2 - 31).$

Укажите значения a и b , при которых оно достигается.

C10. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

а) $\log_{4a^2 - 20a + 27} 8 + \log_{25b^2 - 20b + 9} 25;$

б) $\log_{4a^2 - 12a + 12} 27 + \log_{16b^2 - 24b + 16} 49.$

Укажите значения a и b , при которых оно достигается.

Глава 3. Уравнения

3.1. Целые уравнения

Уровень А

A1. Найдите корень уравнения:

а) $2x - 1 = 10x + 3$;

б) $10 - 2x = -4x + 3$.

A2. Решите уравнение: а) $\frac{5}{6}x = 5\frac{5}{6}$;

б) $\frac{4}{7}x = 4\frac{4}{7}$.

A3. Решите уравнение: а) $\frac{2}{3}x^2 = 2\frac{2}{3}$;

б) $\frac{5}{8}x^2 = 30\frac{5}{8}$.

A4. Решите уравнение:

а) $x^2 - 81 = (x - 9)^2$;

б) $x^2 - 49 = (x - 7)^2$.

A5. а) Решите уравнение $2x^2 - x - 45 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

б) Решите уравнение $4x^2 + x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

A6. Решите уравнение:

а) $(x - 15)^2 = 11(x - 15)$;

б) $(x - 8)^2 = 9(x - 8)$.

A7. Решите уравнение:

а) $(3x - 4)^2 = (3x - 5)^2$;

б) $(2x + 9)^2 = (2x + 11)^2$.

A8. Найдите корень уравнения:

а) $(x - 2)^3 = 27$;

б) $(x - 3)^3 = 64$.

A9. Решите уравнение:

а) $|4x + 5| = 6$;

б) $|6x + 5| = 4$.

A10. а) Укажите номера тех уравнений, которые не имеют отрицательных корней:

1) $x^2 - 6x + 11 = 0$;

3) $x^3 - 5x^2 - 2 = 0$;

2) $x^4 - 5x + 5 = 0$;

4) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

б) Укажите номера тех уравнений, которые не имеют отрицательных корней:

1) $x^2 - 2x - 8 = 0$;

3) $x^4 - 3x + 11 = 0$;

2) $x^3 - 4x^2 - 5 = 0$;

4) $x^2 - 4x + 9 = 0$.

Уровень В

B1. Решите уравнение:

а) $4x^3 = 25x$;

б) $16x^3 = 49x$.

B2. Решите уравнение:

а) $x\sqrt{2} + x\sqrt{18} + 4\sqrt{2} = x\sqrt{50} + \sqrt{8}$;

б) $x\sqrt{2} + x\sqrt{72} + 3\sqrt{2} = x\sqrt{128} + \sqrt{98}$.

B3. Решите уравнение:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

б) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

B4. Решите уравнение:

а) $x^4 + 3x^2 - 1 = 0$;

б) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.

B5. Решите уравнение:

а) $|4x - 5| = 5x - 4$;

б) $|3x + 8| = 8x + 3$.

B6. Решите уравнение:

а) $|x^2 - 1| = |x^2 - 7|$;

б) $|x^2 - 7| = |x^2 - 11|$.

B7. Решите уравнение:

а) $|5x^2 - 3x - 2| = -5x^2 + 3x + 2$;

б) $|4x^2 - x - 3| = -4x^2 + x + 3$.

B8. Решите уравнение:

а) $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 6x - 7)^2 = 0$;

б) $(x^2 - 49)^2 + (x^2 + 4x - 21)^2 = 0$.

B9. Решите уравнение:

а) $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$;

б) $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$.

B10. а) Какие из утверждений о корнях уравнения $x^3 - 6789x^2 - 9876 = 0$ истинны:

1) уравнение имеет по крайней мере один отрицательный корень;

2) уравнение имеет не менее двух отрицательных корней;

3) уравнение не имеет отрицательных корней;

4) все корни уравнения отрицательны?

б) Какие из утверждений о корнях уравнения $x^3 - 2345x^2 - 5432 = 0$ истинны:

1) уравнение не имеет отрицательных корней;

2) уравнение имеет не менее двух отрицательных корней;

3) уравнение имеет по крайней мере один отрицательный корень;

4) все корни уравнения отрицательны?

Уровень С

C1. Решите уравнение:

а) $(x^2 + 5x + 1)^2 + 2x^2 + 10x = 1$;

б) $(x^2 + 6x + 1)^2 + 3x^2 + 18x = 1$.

C2. Решите уравнение:

а) $2x^4 - x^2(x + 2) - (x + 2)^2 = 0$;

б) $3x^4 + 2x^2(x - 2) - (x - 2)^2 = 0$.

- С3.** Решите уравнение:
 а) $(x^2 + 4x + 3)^2 + (x^2 - 2x - 15)^2 = 36(x + 3)^2$;
 б) $(x^2 + x - 20)^2 + (x^2 + 8x + 15)^2 = 25(x + 5)^2$.
- С4.** Решите уравнение:
 а) $|x^2 + 11x + 28| = |x^2 - 14|$; б) $|x^2 - 11x + 24| = |x^2 - 12|$.
- С5.** Решите уравнение:
 а) $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 2x^2 - 13$; б) $|x^2 - 1| + |x^2 - 16| = 2x^2 - 17$.
- С6.** Решите уравнение:
 а) $(x^2 + 3x - 4)^2 + (x^2 + 2x - 3)^2 = (x^2 + x - 2)^2 + (x^2 - 1)^2$;
 б) $(x^2 + 4x + 3)^2 + (x^2 + 3x + 2)^2 = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - x - 2)^2$.
- С7.** Решите уравнение:
 а) $(8x - 25)^{17} + (2x + 5)^{34} = 0$; б) $(12x - 49)^{25} + (2x + 7)^{50} = 0$.
- С8.** а) Уравнение $(x + 3)(x^2 - 5x + 4) = (x - 4)(x^2 + 2x - 3)$:
 1) не имеет корней;
 2) имеет 1 корень;
 3) имеет 2 различных корня;
 4) имеет 3 различных корня;
 5) имеет бесконечно много корней.
 Укажите номер истинного утверждения.
 б) Уравнение $(x - 4)(x^2 - 6x + 5) = (x - 5)(x^2 - 5x + 4)$:
 1) не имеет корней;
 2) имеет 1 корень;
 3) имеет 2 различных корня;
 4) имеет 3 различных корня;
 5) имеет бесконечно много корней.
 Укажите номер истинного утверждения.
- С9.** Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y , для которых:
 а) $|x^2 - 7y + 6| + (x + 2y - 3)^2 = 0$;
 б) $|x^2 - 5y + 4| + (x - 3y + 2)^2 = 0$.
- С10.** Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , для которых:
 а) $3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 7$; б) $2(x - 3)^2 + 3(y - 2)^2 = 5$.

3.2. Дробно-рациональные уравнения

Уровень А

- А1.** Найдите корень уравнения: а) $\frac{1}{x+9} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3x+1} = \frac{1}{7}$.
- А2.** Найдите корень уравнения: а) $\frac{1}{5x-3} = \frac{1}{6x-2}$; б) $\frac{1}{7x+11} = \frac{1}{6x+8}$.

- A3. Решите уравнение: а) $\frac{2}{5x} = \frac{5x}{2}$; б) $\frac{3}{4x} = \frac{4x}{3}$.
- A4. Найдите корень уравнения: а) $\frac{x-46}{x+2} = -3$; б) $\frac{x+25}{x-3} = -1$.
- A5. Решите уравнение: а) $x = \frac{-4x+7}{x-10}$; б) $x = \frac{-9x+15}{x-7}$.
- A6. а) Решите уравнение $\frac{12}{x^2+8} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.
 б) Решите уравнение $\frac{23}{x^2+7} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
- A7. Решите уравнение: а) $\frac{x-5}{x+2} = \frac{x-5}{2x+1}$; б) $\frac{x+2}{3x+5} = \frac{x+2}{5x+3}$.
- A8. Решите уравнение:
 а) $\frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{x^2-2x-3} = 0$; б) $\frac{(x+2)(x-4)(x+1)}{x^2+3x+2} = 0$.
- A9. Решите уравнение: а) $\frac{1}{|x-4|} = 1$; б) $\frac{1}{|x+3|} = 1$.

Уровень В

- B1. Решите уравнение: а) $\frac{x^2-x-12}{x^2-5x+4} = 0$; б) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+x-12} = 0$.
- B2. Решите уравнение: а) $\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 = 0$; б) $\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} - 5 = 0$.
- B3. Решите уравнение: а) $\frac{y-1}{y} + \frac{1}{y^2} = 1$; б) $\frac{y+1}{y} - \frac{4}{y^2} = 1$.
- B4. Решите уравнение: а) $\frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{x} + \frac{1}{x+2}$; б) $\frac{x+4}{x-3} = \frac{4}{x} + \frac{7}{x-3}$.
- B5. Решите уравнение: а) $\frac{2x-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{2x}$; б) $\frac{2x-1}{x-4} = 1 + \frac{2}{5x}$.
- B6. Решите уравнение:
 а) $\frac{x-15}{x(x+7)} + \frac{2}{x+7} = 2$; б) $\frac{x+14}{x(x+1)} + \frac{3}{x+1} = 3$.

В7. Решите уравнение:

а) $\frac{y-5}{y-3} + \frac{4}{y+3} = -\frac{24}{y^2-9}$;

б) $\frac{y+1}{y+2} - \frac{1}{y-2} = -\frac{4}{y^2-4}$.

В8. Решите уравнение:

а) $2\left(\frac{7x+5}{x}\right)^2 - 11 \cdot \frac{7x+5}{x} + 15 = 0$;

б) $5\left(\frac{4x+7}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4x+7}{x} - 2 = 0$.

В9. Решите уравнение:

а) $2P(x-4) + 3P(x-3) = 2P(-4)$, если $P(t) = \frac{1}{t+5}$;

б) $2P(x+4) + P(x+3) = 4P(7)$, если $P(t) = \frac{1}{t-5}$.

В10. Укажите номера тех уравнений, которые не имеют положительных корней:

а) 1) $\frac{x^4+5}{4x} = -1$;

3) $\frac{6-4x}{3-x} = 2$;

2) $\frac{3x-5}{5x-3} = 1$;

4) $\frac{x^2+8x+7}{3x^2+11x+9} = -2$.

б) 1) $\frac{x^6+7}{2x} = -1$;

3) $\frac{12-7x}{4-3x} = 3$;

2) $\frac{x-4}{4x-1} = 1$;

4) $\frac{2x^2+15x+6}{x^2+13x+25} = -2$.

Уровень С

С1. Решите уравнение:

а) $\frac{3x+2}{2x+3} + \frac{2x+3}{3x+2} = -2$;

б) $\frac{4x-3}{3x-4} + \frac{3x-4}{4x-3} = 2$.

С2. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x-2} - \frac{4x+4}{x^3-8}$;

б) $\frac{4}{x^2+3x+9} = \frac{1}{x-3} - \frac{6x+9}{x^3-27}$.

С3. Решите уравнение: а) $x^2 = \frac{12}{1+\frac{1}{x}}$;

б) $x^2 = \frac{6}{1-\frac{1}{x}}$.

С4. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2}{x+2} + \frac{x}{x^2-2} = 2$;

б) $\frac{x^2}{x+6} + \frac{x}{x^2-6} = 2$.

C5. Решите уравнение:

а) $\left(\frac{3x-2}{4x+3}\right)^2 + \left(\frac{3x+2}{4x-3}\right)^2 = 2 \cdot \frac{9x^2-4}{16x^2-9};$

б) $\left(\frac{2x-3}{3x+4}\right)^2 + \left(\frac{2x+3}{3x-4}\right)^2 = 2 \cdot \frac{4x^2-9}{9x^2-16}.$

C6. Решите уравнение: а) $\frac{2-7x^3}{x} = 2x-7;$ б) $\frac{3-5x^3}{x} = 3x-5.$

C7. Найдите меньший корень уравнения:

а) $x^2 - x = 14 - \frac{24}{x^2 - x};$ б) $x^2 - 5x = 30 - \frac{144}{x^2 - 5x}.$

C8. Решите уравнение:

а) $\frac{2x+1}{x-3} + \frac{5}{x+4} = \frac{7}{x-3} + \frac{x+9}{x+4} + \frac{12}{x^3+x^2-12x+12};$

б) $\frac{2x-1}{x+3} + \frac{5}{x-4} = -\frac{7}{x+3} + \frac{x+1}{x-4} + \frac{11}{x^3-x^2-12x+11}.$

C9. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3x}{x^2+2x+1} = 1;$ б) $\frac{x^2-4x+2}{x^2-2x+2} - \frac{3x}{x^2+2x+2} = 1.$

C10. Решите уравнение:

а) $\frac{4}{\sqrt{x^2+10x}} = \frac{1}{25} + \frac{2}{5x};$ б) $\frac{4}{\sqrt{x^2+5x}} = 1 + \frac{5}{x}.$

3.3. Иррациональные уравнения

Уровень А

A1. Найдите корень уравнения: а) $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{8};$ б) $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{6}.$

A2. Найдите корень уравнения: а) $\sqrt{x+72} = 9;$ б) $\sqrt{5x+21} = 4.$

A3. Найдите корень уравнения: а) $\sqrt[3]{x+9} = 5;$ б) $\sqrt[3]{x-3} = 3.$

A4. Найдите корень уравнения: а) $\sqrt{\frac{7x+18}{8}} = 5;$ б) $\sqrt{\frac{7x+41}{17}} = 3.$

A5. Решите уравнение: а) $\frac{x^2-4}{\sqrt{-3x}}=0$; б) $\frac{x^2-16}{\sqrt{-4x}}=0$.

A6. Решите уравнение:

а) $(x^2-36)\sqrt{4-x}=0$; б) $(x^2-64)\sqrt{5-x}=0$.

A7. Решите уравнение: а) $\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x-2}}=0$; б) $\frac{x^2-17x+16}{\sqrt{x-4}}=0$.

A8. Решите уравнение:

а) $(x-8)(x+6)\sqrt{3-x}=0$; б) $(x-9)(x+5)\sqrt{2-x}=0$.

A9. Решите уравнение:

а) $\frac{(x-1)(x-5)(x-9)}{\sqrt{x-1}-2}=0$; б) $\frac{(x-3)(x-7)(x-13)}{\sqrt{x-3}-4}=0$.

A10. Решите уравнение:

а) $\sqrt{(2x-3)^2}=3$; б) $\sqrt{(4x-7)^2}=5$.

Уровень В

B1. а) Решите уравнение $\sqrt{-48-14x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

б) Решите уравнение $\sqrt{-40-13x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

B2. Решите уравнение: а) $\sqrt{7x-5}=x-7$; б) $\sqrt{5x+4}=x-4$.

B3. Решите уравнение: а) $\sqrt{5-2x}=2x-5$; б) $\sqrt{9-4x}=4x-9$.

B4. Решите уравнение: а) $5\sqrt{x}=4x+1$; б) $5\sqrt{x}=3x+2$.

B5. Решите уравнение: а) $\frac{\sqrt{x-3}}{5x+7}=\frac{\sqrt{x-3}}{7x+9}$; б) $\frac{\sqrt{x-2}}{7x-8}=\frac{\sqrt{x-2}}{2x-3}$.

B6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{(x-5)(x-2)}=\sqrt{x-5}$; б) $\sqrt{(x-8)(x-4)}=\sqrt{x-8}$.

B7. Решите уравнение:

а) $(x+4)\sqrt{x-3}=\sqrt{x-3}$; б) $(x+5)\sqrt{x-2}=\sqrt{x-2}$.

B8. Решите уравнение: а) $\sqrt{\frac{x+3}{2}}=x+2$; б) $\sqrt{\frac{x-1}{3}}=x-3$.

B9. Решите уравнение: а) $\sqrt{x-5} = \sqrt{x^2-25}$; б) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-9}$.

B10. Решите уравнение: а) $\frac{\sqrt{4x^2-9}}{\sqrt{3-2x}} = 5$; б) $\frac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{2-3x}} = 4$.

Уровень С

C1. Решите уравнение:

а) $(4x^2 - 4x - 3)\sqrt{4x^2 - 12x + 5} = 0$;

б) $(9x^2 + 6x - 3)\sqrt{9x^2 + 18x + 5} = 0$.

C2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4} = 0$;

б) $\sqrt{x^2 + 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 9} = 0$.

C3. Решите уравнение:

а) $|\sqrt{3x+4} - 1| = 3$;

б) $|\sqrt{4x-3} - 1| = 2$.

C4. Решите уравнение:

а) $x^2 + x - 2\sqrt{x^2 + x + 4} = 4$;

б) $x^2 + x - 2\sqrt{x^2 + x + 5} = 10$.

C5. Найдите все общие корни уравнений:

а) $x^3 - x = \sqrt{x^2 + 9}$ и $2\sqrt{x^2 + 9} = x^3 + x$;

б) $3\sqrt{x^2 + 6} = x^3 - 8x$ и $x^3 - 4x = \sqrt{x^2 + 6}$.

C6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + 9\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} = 6$;

б) $\sqrt{\frac{x-2}{2x+1}} + 16\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}} = 8$.

C7. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{4x-7} = 1$;

б) $\sqrt{4x-11} - \sqrt{3x+1} = -1$.

C8. Решите уравнение:

а) $\sqrt{6x-5} = |x| - |3x-2| + 1$;

б) $\sqrt{2x-3} = |x| - |3x-4| + 1$.

C9. Решите уравнение:

а) $x(2x+1) + 2x\sqrt{\frac{2x+1}{x}} + 1 = 0$; б) $x(3x+4) + 4x\sqrt{\frac{3x+4}{x}} + 4 = 0$.

C10. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-4x+29}} = \frac{7}{5}$; б) $\frac{2}{\sqrt{x^2-6x+10}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \frac{5}{2}$.

3.4. Тригонометрические уравнения

Уровень А

- A1.** Решите уравнение: а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- A2.** Решите уравнение: а) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\cos x = \frac{1}{2}$.
- A3.** Решите уравнение: а) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x = -\frac{1}{2}$.
- A4.** Решите уравнение: а) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- A5.** Решите уравнение: а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- A6.** Решите уравнение: а) $\operatorname{tg} x = -1$; б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.
- A7.** Решите уравнение: а) $\cos \frac{\pi x}{3} = 0$; б) $\sin \frac{\pi x}{6} = 1$.
- A8.** Решите уравнение:
а) $(2\sin x - 1)(2\cos x + 5) = 0$;
б) $(3\sin x - 4)(2\cos x + 1) = 0$.
- A9.** Решите уравнение:
а) $\frac{(5x - 8\pi)(8x - 5\pi)}{\sqrt{\sin x}} = 0$; б) $\frac{(5x - 6\pi)(11x - 5\pi)}{\sqrt{\cos x}} = 0$.
- A10.** Решите уравнение:
а) $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$; б) $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$.

Уровень В

- B1.** Решите уравнение, в ответе запишите наименьший положительный корень:
а) $\sin \frac{\pi(x-1)}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\sin \frac{\pi(x+4)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- B2.** а) Решите уравнение $\cos \frac{\pi(8x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.
б) Решите уравнение $\cos \frac{\pi(x-8)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

- В3.** а) Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+9)}{6} = \sqrt{3}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.
б) Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(2x+1)}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.
- В4.** Решите уравнение:
а) $\sin(-3x)\cos 3x = \frac{1}{4}$; б) $\sin(-2x)\cos 2x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- В5.** Решите уравнение:
а) $2\cos^2 2x = 2\sin^2 2x - \sqrt{2}$; б) $2\cos^2 3x = 2\sin^2 3x - \sqrt{3}$.
- В6.** Решите уравнение:
а) $3\cos^2 x - 7\cos x + 4 = 0$; б) $4\sin^2 x - 11\sin x + 7 = 0$.
- В7.** Решите уравнение:
а) $2\sin^2 x + 5\cos x - 5 = 0$; б) $3\cos^2 x + 7\sin x - 7 = 0$.
- В8.** Решите уравнение: а) $\cos 2x = 5\cos x + 2$; б) $\cos 2x = 13\sin x + 7$.
- В9.** Решите уравнение: а) $\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$; б) $\sin 2x = -\sin x$.
- В10.** Решите уравнение: а) $\frac{6\cos x - 1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$; б) $\frac{5\sin x - 2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

Уровень С

- C1.** Решите уравнение:
а) $(\cos x + 2\sin x)^2 = 2 + 3\sin^2 x$;
б) $(4\cos x + \sin x)^2 = -1 + 15\sin^2 x$.
- C2.** Решите уравнение:
а) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$; б) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3x + \frac{6\pi}{5}\right)$.
- C3.** а) 1) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\cos x$.
2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi; -5\pi]$.
б) 1) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos x$.
2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-4\pi; -3\pi]$.

- C4.** а) 1) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \cos x + \sqrt{2}$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.
- б) 1) Решите уравнение $\sin 2x = \sin x - 2 \cos x + 1$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.
- C5.** а) 1) Решите уравнение $\frac{5}{\cos^2 x} + \frac{8}{\cos x} - 4 = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.
- б) 1) Решите уравнение $\frac{5}{\sin^2 x} + \frac{7}{\sin x} - 6 = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.
- C6.** а) 1) Решите уравнение $\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} - 2 = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.
- б) 1) Решите уравнение $\frac{5}{\cos^2 x} + \frac{7}{\cos x} + 2 = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.
- C7.** а) 1) Решите уравнение $4 \operatorname{tg}^2 x - \frac{11}{\cos x} + 10 = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.
- б) 1) Решите уравнение $2 \operatorname{tg}^2 x + \frac{5}{\cos x} + 4 = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

- C8.** а) 1) Решите уравнение $4\sin^4 x - 11\sin^2 x + 6 = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.
- б) 1) Решите уравнение $6\cos^4 x - 11\cos^2 x + 4 = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.
- C9.** а) 1) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \sqrt{3}$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.
- б) 1) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{2}$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.
- C10.** а) 1) Решите уравнение $\frac{2\cos x - 3}{2\cos x - 1} + \frac{1}{2\cos^2 x - \cos x} = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.
- б) 1) Решите уравнение $\frac{2\sin x - 3}{\sin x - 1} + \frac{1}{\sin^2 x - \sin x} = 0$.
 2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

3.5. Показательные уравнения

Уровень А

- A1.** Найдите корень уравнения: а) $8^{x+5} = 64$; б) $3^{2-x} = 81$.
- A2.** Найдите корень уравнения: а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} = 16$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 49$.

A3. Найдите корень уравнения: а) $4^{5x-1} = 4^{4x+1}$; б) $5^{4x-5} = 5^{3x-2}$.

A4. Найдите корень уравнения:

а) $2^{5x-6} \cdot 2^{1-4x} = 1$; б) $2^{2x-1} \cdot 2^{-4x-3} = 16$.

A5. Найдите корень уравнения: а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 8^x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = 3^x$.

A6. Найдите корень уравнения:

а) $2^{7-3x} = 4^{2x}$; б) $2^{6x+5} = 8^{2x}$.

A7. Найдите корень уравнения:

а) $4^{2x+1} = 0,16 \cdot 10^{2x+1}$; б) $3^{x+4} = 1,5 \cdot 2^{x+4}$.

A8. Решите уравнение: а) $9 \cdot 4^x = 4 \cdot 9^x$; б) $5 \cdot 2^x = 2 \cdot 5^x$.

A9. Решите уравнение: а) $7^{x+1} - 3 \cdot 7^x = 196$; б) $3^{x+1} - 3^x = 162$.

A10. Решите уравнение:

а) $(x-1)(x-4) \cdot 9^{\sqrt{x-2}} = 0$; б) $(x-2)(x-7) \cdot 9^{\sqrt{x-5}} = 0$.

Уровень В

B1. Решите уравнение:

а) $36^{x+1} + 35 \cdot 6^x - 1 = 0$; б) $4^{x+2} + 15 \cdot 2^x - 1 = 0$.

B2. Решите уравнение:

а) $(5x-4) \cdot 3^{4x-5} = 5x-4$; б) $(5x-7) \cdot 9^{7x+5} = 5x-7$.

B3. Решите уравнение: а) $\frac{2^{x^2}-16}{x-2} = 0$; б) $\frac{3^{x^2}-3}{x-1} = 0$.

B4. Решите уравнение: а) $\frac{5^{x^2-2x}}{x+1} = \frac{125}{x+1}$; б) $\frac{2^{x^2+3x}}{x+4} = \frac{16}{x+4}$.

B5. Решите уравнение: а) $\frac{7^{x^2-8}-7}{\sqrt{4-x}-1} = 0$; б) $\frac{6^{x^2-15}-6}{\sqrt{5-x}-1} = 0$.

B6. Решите уравнение:

а) $3^{2x+1} = 27 + 53 \cdot 3^x + 3^{2x}$;
б) $5^{2x+1} = 25 + 74 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{2x}$.

B7. Решите уравнение: а) $35^{1-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} \cdot 7^x$; б) $63^{3-x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x} \cdot 9^x$.

B8. Решите уравнение:

а) $0,125 \cdot 4^{3x-9} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$; б) $0,25 \cdot 4^{5x-16} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-x}$.

B9. Решите уравнение: а) $\frac{1}{4^x+3} = \frac{4^x}{4^x+24}$; б) $\frac{1}{3^x+4} = \frac{3^x}{3^x+18}$.

B10. Решите уравнение:

а) $5^{2x} + 5^{-2x} = 2$;

б) $6^{2x} + 6^{-2x} = 2$.

Уровень С

C1. Решите уравнение:

а) $4 \cdot 25^x + 3 \cdot 20^x - 10 \cdot 16^x = 0$;

б) $5 \cdot 9^x + 7 \cdot 15^x - 6 \cdot 25^x = 0$.

C2. Решите уравнение:

а) $8^{1+x^2} - 8 \cdot 8^{1-x^2} = 56$;

б) $5^{1+x^2} - 5 \cdot 5^{1-x^2} = 20$.

C3. Решите уравнение:

а) $121 \cdot 13^{x^2-9} - 13 \cdot 11^{x^2-8} = 169 \cdot 11^{x^2-9} - 11 \cdot 13^{x^2-8}$;

б) $169 \cdot 8^{x^2-6} - 8 \cdot 13^{x^2-5} = 64 \cdot 13^{x^2-6} - 13 \cdot 8^{x^2-5}$.

C4. Решите уравнение:

а) $25^{2\sqrt{x+3}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x+3}} + 5 = 0$;

б) $9^{\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x-2}} + 3 = 0$.

C5. Решите уравнение:

а) $4^x - 13 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{2x-1}$;

б) $9^x - 2 \cdot 7^{x-\frac{1}{2}} = 7^{x+\frac{1}{2}} - 4 \cdot 3^{2x-1}$.

C6. Решите уравнение: а) $\frac{7^x - 2 \cdot 7^{-x}}{7^x + 2 \cdot 7^{-x}} = \frac{5}{9}$;

б) $\frac{5^x - 2 \cdot 5^{-x}}{5^x + 2 \cdot 5^{-x}} = \frac{3}{7}$.

C7. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^x + 5^{-x} = \frac{2}{25}$;

б) $\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^x + 6^{-x} = \frac{1}{4}$.

C8. Решите уравнение:

а) $3^{2x+1} = 27 + 53 \cdot 3^x + 3^{2x}$;

б) $5^{2x+1} = 25 + 74 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{2x}$.

C9. Решите уравнение:

а) $9^{\sin^2 x} + 72 = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{\cos^2 x - 3}$;

б) $4^{\sin^2 x} + 12 = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{\cos^2 x - 2}$.

C10. а) 1) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot (0,2)^{-\sin x}$.

2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

B9. Решите уравнение: а) $\frac{1}{4^x+3} = \frac{4^x}{4^x+24}$; б) $\frac{1}{3^x+4} = \frac{3^x}{3^x+18}$.

B10. Решите уравнение:

а) $5^{2x} + 5^{-2x} = 2$;

б) $6^{2x} + 6^{-2x} = 2$.

Уровень С

C1. Решите уравнение:

а) $4 \cdot 25^x + 3 \cdot 20^x - 10 \cdot 16^x = 0$;

б) $5 \cdot 9^x + 7 \cdot 15^x - 6 \cdot 25^x = 0$.

C2. Решите уравнение:

а) $8^{1+x^2} - 8 \cdot 8^{1-x^2} = 56$;

б) $5^{1+x^2} - 5 \cdot 5^{1-x^2} = 20$.

C3. Решите уравнение:

а) $121 \cdot 13^{x^2-9} - 13 \cdot 11^{x^2-8} = 169 \cdot 11^{x^2-9} - 11 \cdot 13^{x^2-8}$;

б) $169 \cdot 8^{x^2-6} - 8 \cdot 13^{x^2-5} = 64 \cdot 13^{x^2-6} - 13 \cdot 8^{x^2-5}$.

C4. Решите уравнение:

а) $25^{2\sqrt{x+3}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x+3}} + 5 = 0$;

б) $9^{\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x-2}} + 3 = 0$.

C5. Решите уравнение:

а) $4^x - 13 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{2x-1}$;

б) $9^x - 2 \cdot 7^{x-\frac{1}{2}} = 7^{x+\frac{1}{2}} - 4 \cdot 3^{2x-1}$.

C6. Решите уравнение: а) $\frac{7^x - 2 \cdot 7^{-x}}{7^x + 2 \cdot 7^{-x}} = \frac{5}{9}$;

б) $\frac{5^x - 2 \cdot 5^{-x}}{5^x + 2 \cdot 5^{-x}} = \frac{3}{7}$.

C7. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^x + 5^{-x} = \frac{2}{25}$;

б) $\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^x + 6^{-x} = \frac{1}{4}$.

C8. Решите уравнение:

а) $3^{2x+1} = 27 + 53 \cdot 3^x + 3^{2x}$;

б) $5^{2x+1} = 25 + 74 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{2x}$.

C9. Решите уравнение:

а) $9^{\sin^2 x} + 72 = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{\cos^2 x - 3}$;

б) $4^{\sin^2 x} + 12 = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{\cos^2 x - 2}$.

C10. а) 1) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot (0,2)^{-\sin x}$.

2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

б) 1) Решите уравнение $14^{\sin x} = (0,5)^{\cos x} \cdot 7^{\sin x}$.

2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

3.6. Логарифмические уравнения

Уровень А

A1. Найдите корень уравнения:

а) $\log_3(7x - 15) = 3$;

б) $\log_2(3x + 1) = 4$.

A2. Найдите корень уравнения:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(9 - x) = -2$;

б) $\log_{\frac{1}{4}}(12 - 4x) = -3$.

A3. Найдите корень уравнения:

а) $\log_6(4x + 21) = \log_6 9$;

б) $\log_{22}(4x - 33) = \log_{22} 3$.

A4. Найдите корень уравнения:

а) $\log_7(3 - x) = 2\log_7 4$;

б) $\log_5(15 - 2x) = 2\log_5 3$.

A5. Найдите корень уравнения:

а) $\log_4(x + 2) + \log_4 3 = \log_4 15$;

б) $\log_2(x - 1) + \log_2 6 = \log_2 18$.

A6. Найдите корень уравнения:

а) $\log_2(x + 4) = \log_2(2x - 12)$;

б) $\log_8(x + 4) = \log_8(5x - 16)$.

A7. Найдите корень уравнения:

а) $\log_2(3x + 5) = \log_2(x + 3) + 1$;

б) $\log_2(x + 7) = \log_2(x + 6) + 1$.

A8. Найдите корень уравнения:

а) $\log_9 3^{2x-6} = 2$;

б) $\log_9 3^{5x-7} = 4$.

A9. Решите уравнение: а) $\frac{(x-5)(x+7)}{\log_2(x+6)} = 0$;

б) $\frac{(x+6)(x-1)}{\log_3(x+3)} = 0$.

A10. Решите уравнение:

а) $(x - 7)\log_5(x - 7) = 0$;

б) $(x + 2)\log_4(x + 2) = 0$.

Уровень В

B1. Решите уравнение: а) $\log_5 x = \frac{1}{\log_5 x}$;

б) $\log_4 x = \frac{1}{\log_4 x}$.

B2. Решите уравнение:

а) $\log_2^2 x - \log_2 x^6 + 8 = 0$;

б) $\log_2^2 x - \log_2 x^{-4} + 3 = 0$.

B3. Найдите корень уравнения:

а) $2^{\log_4(4x+8)} = 4$;

б) $3^{\log_9(5x-4)} = 4$.

B4. Решите уравнение:

а) $\log_5(x^2 - 2) = \log_5 x$;

б) $\log_9(x^2 - 6) = \log_9 x$.

B5. Решите уравнение:

а) $\log_2(x - 2)^4 = 8$;

б) $\log_3(x + 3)^6 = 12$.

B6. Решите уравнение:

а) $\log_6(x^2 - 3x + 32) = 2$;

б) $\log_3(x^2 + 7x + 37) = 3$.

B7. Решите уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(3^x + 2x - 3) = -x$;

б) $\log_{\frac{1}{7}}(7^{3x} - 5x - 7) = -3x$.

B8. Решите уравнение: а) $\log_{\frac{1}{3}}|2 - 5x| = -3$; б) $\log_{\frac{1}{2}}|19 - 5x| = -2$.

B9. Решите уравнение:

а) $2\log_2 x + \log_8 x - \log_{16} x = \frac{25}{3}$;

б) $2\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{17}{2}$.

B10. Решите уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(1 + 3x) = 6 - 7^{\log_7 4}$;

б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3 + 2x) = 8 - 5^{\log_5 4}$.

Уровень С

C1. Решите уравнение:

а) $\log_7(x + 9) + \log_7(5x + 17) = 2$;

б) $\log_3(x + 4) + \log_3(5x + 8) = 2$.

C2. Решите уравнение:

а) $\log_3(2x + 89) + \log_3(x + 34) = 3 + \log_3 20$;

б) $\log_5(2x + 81) + \log_5(x + 38) = 2 + \log_5 21$.

C3. Решите уравнение:

а) $\log_8(x + 6)^2 + \log_8(x + 4)^2 = \frac{2}{\log_3 8}$;

б) $\log_7(x + 4)^2 + \log_7(x + 3)^2 = \frac{2}{\log_2 7}$.

C4. Решите уравнение:

а) $3\log_8^2(3x + 79) - 14\log_8(3x + 79) + 16 = 0$;

б) $3\log_8^2(5x + 89) - 16\log_8(5x + 89) + 20 = 0$.

С5. Решите уравнение:

а) $\log_3(5x+1) + \log_{5x+1}3 = \frac{17}{4}$;

б) $\log_4(3x+1) + \log_{3x+1}4 = \frac{10}{3}$.

С6. Решите уравнение:

а) $\log_{(x+3)^2}(x^3 - 9x^2 - 10x) = \log_{x+3}\sqrt{x^3 - 10x^2 - x + 22}$;

б) $\log_{(x+6)^2}(x^3 + 3x^2 - 4x) = \log_{x+6}\sqrt{x^3 + 2x^2 - 7x + 10}$.

С7. Решите уравнение:

а) $\log_{2019}(2x^3 + x^2 + 4x - 34) = \log_{2019}(2x^3 - x + 2)$;

б) $\log_{2020}(2x^3 + x^2 - x - 48) = \log_{2020}(2x^3 + 3x - 3)$.

С8. Решите уравнение:

а) $\log_8 \log_9 \log_{7x+6}((7x+6)^9 + x^2 - x - 56) = 0$;

б) $\log_6 \log_7 \log_{3x+14}((3x+14)^7 + x^2 - 7x - 30) = 0$.

С9. Решите уравнение:

а) $(x+3)^{\log_{x+3}(x+2)^2} = 9$; б) $(x+2)^{\log_{x+2}(x+1)^2} = 16$.

С10. а) 1) Решите уравнение $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$.

2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

б) 1) Решите уравнение $\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2$.

2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

4.1. Системы целых уравнений

Уровень А

A1. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 5x + y = -2, \\ 7x - y = -10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 13, \\ 4x - y = 15. \end{cases}$

A2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x - 3y = -4, \\ 4x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ 3x + 4y = -2. \end{cases}$

A3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 8x + 3y = -3, \\ 4x + 3y = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x + 2y = 23, \\ 3x + 2y = 13. \end{cases}$

A4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 5y = 3, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x - 2y = 2, \\ 5y - 7x = 3. \end{cases}$

A5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 15x - 4y = 14, \\ 5x + 4y = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 3y = 9, \\ 2x + 3y = -18. \end{cases}$

A6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 3x - 5y = -8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 2y = 24, \\ 5x - y = 18. \end{cases}$

A7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x - 3y = 7, \\ 7x + y = -11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 3y = -5, \\ 5x + y = -9. \end{cases}$

A8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 5y = 5, \\ x - 3y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 5y = -2, \\ -x + 4y = -3. \end{cases}$

A9. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 10y - x = -21, \\ 3x + 5y = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 15y + x = 29, \\ 2x - 3y = -8. \end{cases}$

A10. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 7, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 9, \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 9. \end{cases}$

Уровень В

В1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x\sqrt{48} + y\sqrt{5} = -11, \\ x\sqrt{27} - y\sqrt{5} = -10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\sqrt{27} + y\sqrt{2} = -6, \\ x\sqrt{75} - y\sqrt{2} = -18. \end{cases}$

В2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 + 7y = 9, \\ 4x^2 - 7y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + 5y = 7, \\ 3x^2 - 5y = -2. \end{cases}$

В3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x + 2y)^2 = 3y, \\ (x + 2y)^2 = 3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (3x + y)^2 = 4y, \\ (3x + y)^2 = 4x. \end{cases}$

В4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x - 5y)(x^2 - 36) = 0, \\ x - y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + 3y)(x^2 - 4) = 0, \\ x + y = -2. \end{cases}$

В5. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15. \end{cases}$

В6. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 4, \\ xy = 21. \end{cases}$

В7. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 6x + 5y = 44, \\ xy = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y = 35, \\ xy = 25. \end{cases}$

В8. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

В9. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 16y^2 + x + 4y = 0, \\ 3x - 4y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 9y^2 + x - 3y = 0, \\ 4x + 3y = 10. \end{cases}$

В10. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = -5, \\ x^2 + xy - x - 11y = 55; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ x^2 - xy + x + 43y = 56. \end{cases}$

Уровень С

С1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} |x + y| = 1, \\ (x^2 - y^2)(x - y) = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x - y| = 2, \\ (x^2 - y^2)(x + y) = 50. \end{cases}$

C2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^3 - 64y^3 = -56, \\ 4y - x = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^3 - 8y^3 = -91, \\ 2y - x = 7. \end{cases}$

C3. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152, \\ x + y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 98, \\ x - y = 2. \end{cases}$

C4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 10, \\ 2y^2 + 9xy = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2 + xy = 30, \\ 3y^2 + 19xy = 60. \end{cases}$

C5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (2x - 3y)^4 + 7(2x - 3y)^2 = 8, \\ 2x + 3y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (3x - 5y)^4 + 6(3x - 5y)^2 = 7, \\ 3x + 5y = 11. \end{cases}$

C6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (4x - 5)^2 + (4y - 5)^2 = 2(4x - 5)(4y - 5), \\ x^2 + y^2 = 72; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (3x + 2)^2 + (3y + 2)^2 = 2(3x + 2)(3y + 2), \\ x^2 + y^2 = 98. \end{cases}$

C7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0, \\ |x + 2y| + |x + 3y| = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ |x + y| + |x - 3y| = 16. \end{cases}$

C8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 6x(y + 1) - 27(y + 1)^2 = 0, \\ (x - 9y - 9)^2 + (x + 3y + 3)^2 = 36; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 5x(y - 1) - 24(y - 1)^2 = 0, \\ (x + 8y - 8)^2 + (x - 3y + 3)^2 = 25. \end{cases}$

C9. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y = -17, \\ 3z - x + 5y = -8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = -2, \\ 2z + x + y = -6. \end{cases}$

C10. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x - 3z)^2 + |y - 7z| = 0, \\ x + y + z = 44; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 4z)^2 + |y - 6z| = 0, \\ x + y + z = 33. \end{cases}$

4.2. Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения

Уровень А

- A1.** Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{5}{2x+y} = 1, \\ 2x-y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{4x+y} = 1, \\ 4x-y = 13. \end{cases}$
- A2.** Решите систему уравнений:
а) $\begin{cases} \frac{4}{3x-y} = -0,5, \\ 0,2x-y = -2,4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{5}{2x-y} = -0,5, \\ 0,3x-y = -4,9. \end{cases}$
- A3.** Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{2x+3y} = -5, \\ 2x-3y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x-3y}{3x+2y} = 5, \\ 3x-2y = 5. \end{cases}$
- A4.** Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{x+3}{y+3} = 2, \\ x+y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+2}{y+2} = 3, \\ x+y = 8. \end{cases}$
- A5.** Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{4}{x+5} = \frac{5}{y+4}, \\ 4x+5y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{x+4} = \frac{4}{y+3}, \\ 3x+4y = 1. \end{cases}$
- A6.** Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{1}{x-7} = \frac{1}{y-5}, \\ 5x+7y = 58; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x-9} = \frac{1}{y-3}, \\ 4x+9y = 50. \end{cases}$
- A7.** Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{11}{x} = \frac{13}{y}, \\ x-y = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{5}{x} = \frac{9}{y}, \\ x-y = -4. \end{cases}$
- A8.** Решите систему уравнений:
а) $\begin{cases} \frac{1}{3x+4} = \frac{1}{3y+4}, \\ 4x-3y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{4x+5} = \frac{1}{4y+5}, \\ 5x-4y = 3. \end{cases}$
- A9.** Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{x-y}{x+y} = 49, \\ x-y = 49; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 47, \\ x+y = 47. \end{cases}$
- A10.** Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{6x}{5x+y} = 7, \\ 5x+y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{8x}{7x+y} = 9, \\ 7x+y = 8. \end{cases}$

Уровень В

В1. Решите систему уравнений: а)
$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{7}{y} = 2, \\ \frac{7}{x} + \frac{3}{y} = 2; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 3, \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 3. \end{cases}$$

В2. Решите систему уравнений: а)
$$\begin{cases} \frac{7x}{2y} = \frac{2y}{7x}, \\ 7x - 2y = -14; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \frac{3x}{4y} = \frac{4y}{3x}, \\ 3x - 4y = 30. \end{cases}$$

В3. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \frac{x^2}{13x+14y} = 14, \\ 13x + 14y = 14; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \frac{x^2}{11x+12y} = 12, \\ 11x + 12y = 12. \end{cases}$$

В4. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} (x-5)(y-3) = 0, \\ \frac{3x+y+12}{x-y+8} = 1; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} (x+3)(y-4) = 0, \\ \frac{2y-x+5}{x+y+7} = 3. \end{cases}$$

В5. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \frac{(x-7)(y-6)}{y-5} = 0, \\ y^2 + 6x + y = 72; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \frac{(x-6)(y-5)}{y-4} = 0, \\ y^2 + 5x + y = 50. \end{cases}$$

В6. Решите систему уравнений: а)
$$\begin{cases} 5x + \frac{4}{y} = -y, \\ 5x + \frac{3}{y} = 2; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{y} = -y, \\ 6x + \frac{4}{y} = -2. \end{cases}$$

В7. Решите систему уравнений: а)
$$\begin{cases} x^2 + \frac{5}{y} = 26, \\ x^2 - \frac{10}{y} = 23; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} x^2 + \frac{6}{y} = 37, \\ x^2 - \frac{12}{y} = 34. \end{cases}$$

В8. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} 4x^2 = 9y^2, \\ \frac{2x+3y+1}{y} = \frac{2x-3y+1}{x}; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 9x^2 = 4y^2, \\ \frac{3x+2y+1}{y} = \frac{3x-2y+1}{x}. \end{cases}$$

B9. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 3x = 4y, \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y-1} = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x = 4y, \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y-4} = 6. \end{cases}$

B10. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 32, \\ \frac{x^2}{32y} + \frac{32y^2}{x} = 33; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 33, \\ \frac{x^2}{33y} + \frac{33y^2}{x} = 34. \end{cases}$

Уровень С

C1. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{y}{x+5} = -5, \\ y^2 + \frac{y^2}{x+5} = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{y}{x+6} = -6, \\ y^2 + \frac{y^2}{x+6} = 7. \end{cases}$

C2. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 24x + \frac{121}{y} = y, \\ 24y + \frac{121}{x} = x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 35x + \frac{169}{y} = y, \\ 35y + \frac{169}{x} = x. \end{cases}$

C3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 7xy + 12y^2 = 0, \\ \frac{12}{x} + \frac{1}{y} = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 9xy + 14y^2 = 0, \\ \frac{14}{x} + \frac{1}{y} = 24. \end{cases}$

C4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1, \\ \frac{x^2 + 5y^2 + 3x - 2}{4y^2 + 3x + 11} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1, \\ \frac{x^2 + 6y^2 + 3x - 8}{5y^2 + 2x + 17} = 1. \end{cases}$

C5. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{xy}{5x-4} = \frac{xy}{4y-5}, \\ 5x + 4y = -9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{xy}{4x+3} = \frac{xy}{3y+4}, \\ 4x + 3y = 7. \end{cases}$

C6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{8}{|x^2 - 9x| + 4} = y^2 + 2, \\ \frac{x + 19y}{x + y - 8} = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{6}{|x^2 - 7x| + 2} = y^2 + 3, \\ \frac{x + 16y}{x + y - 6} = 7. \end{cases}$

C7. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x}{1-\frac{5}{x+5}} = \frac{y}{1-\frac{6}{y+6}}, \\ 5x - y = xy + 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x}{1-\frac{4}{x+4}} = \frac{y}{1-\frac{5}{y+5}}, \\ 4x - y = xy + 4. \end{cases}$$

C8. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2}{(2x-3z)^2+1} + \frac{3}{(3y-4z)^2+1} = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 66; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{3}{(3x-4z)^2+1} + \frac{4}{(4y-5z)^2+1} = 7, \\ 3x + 4y + 5z = 168. \end{cases}$$

C9. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , являющиеся решениями системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x = \frac{7y-34}{y-5}, \\ x^2 + y^2 = 52; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \frac{6y-23}{y-4}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

C10. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , являющиеся решениями системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y = 3x + \frac{5}{3x+1}, \\ x^3 = y - 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = 4x - \frac{7}{4x-1}, \\ x^3 = y + 1. \end{cases}$$

4.3. Системы, содержащие иррациональные уравнения

Уровень А

A1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x+y-3} = 0, \\ \sqrt{x-y-1} = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{x+y-4} = 0, \\ \sqrt{x-y-2} = 0. \end{cases}$$

A2. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 4, \\ x + y = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 3, \\ x + y = 10. \end{cases}$

A3. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \sqrt{x-y} = 2, \\ x + y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x-y} = 3, \\ x + y = 11. \end{cases}$

A4. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \sqrt{3x+4y} = 0, \\ \sqrt{3x-4y} = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{2x+3y} = 0, \\ \sqrt{2x-3y} = 6. \end{cases}$

A5. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-7}{y-6}} = 1, \\ x + y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-9}{y-5}} = 1, \\ x + y = 12. \end{cases}$

A6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{3x - y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - 2y + 5} = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x - 3y + 3} = 1, \\ \sqrt{2x - y + 3} = 2. \end{cases}$

A7. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4x+5y}} = 1, \\ 4x - 5y = -9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x+4y}} = 1, \\ 3x - 4y = -7. \end{cases}$

A8. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{7}} = 2, \\ \frac{x+y}{7} = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{9}} = 3, \\ \frac{x+y}{9} = 5. \end{cases}$

A9. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \sqrt{\frac{3y}{5x}} = 1, \\ 5x + 3y = 30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{7y}{2x}} = 1, \\ 2x + 7y = 28. \end{cases}$

A10. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \sqrt{\frac{2y-3x}{x}} = 3, \\ x + y = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{2y-5x}{x}} = 5, \\ x + y = 16. \end{cases}$

Уровень В

B1. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 2\sqrt{x} = y, \\ y^2 + 2\sqrt{x} = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\sqrt{x} = 2y, \\ y^2 + 5\sqrt{x} = 15. \end{cases}$

B2. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x - 6\sqrt{y} = -1, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2\sqrt{y} = -2, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

B3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (\sqrt{x} - 5)(\sqrt{y} - 2) = 0, \\ 3x + 2y = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{y} - 5) = 0, \\ 5x + 2y = 34. \end{cases}$

B4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x - 3\sqrt{y} = -35, \\ 5x + 3\sqrt{y} = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3\sqrt{y} = 1, \\ 2x - 3\sqrt{y} = -17. \end{cases}$

B5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x-2)\sqrt{y-3} = 0, \\ x+y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-4)\sqrt{y-6} = 0, \\ x+y = 8. \end{cases}$

B6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x-25)(y-28) = 0, \\ y+5\sqrt{x} = 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-16)(y-19) = 0, \\ y+4\sqrt{x} = 16. \end{cases}$

B7. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 2\sqrt{x} = y-4, \\ 4\sqrt{x} = y+2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3\sqrt{x} = y-5, \\ 5\sqrt{x} = y+3. \end{cases}$

B8. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 8, \\ \frac{\sqrt{x+y}}{x} = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 6, \\ \frac{\sqrt{x+y}}{x} = 3. \end{cases}$

B9. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ x - y = 32; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 76, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 38. \end{cases}$

B10. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} |5x+7y| = |y| + 20, \\ \sqrt{5x+7y} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |3x+8y| = |y| + 33, \\ \sqrt{3x+8y} = 6. \end{cases}$

Уровень С

C1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = 12\sqrt{x}, \\ 144x - 7y - 18 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 11\sqrt{x}, \\ 121x + y - 20 = 0. \end{cases}$

C2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} + 6 = 5\sqrt{\frac{x}{y}}, \\ x+y = 40; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y} + 14 = 9\sqrt{\frac{x}{y}}, \\ x+y = 50. \end{cases}$

C3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y-24\sqrt{x+2y}+144=0, \\ x-2y=44; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 2x+y-22\sqrt{2x+y}+121=0, \\ 2x-y=-21. \end{cases}$

C4. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 12\sqrt{\frac{y}{x}} + 4, \\ x + y = 37; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 15\sqrt{\frac{y}{x}} + 2, \\ x + y = 26. \end{cases} \end{array}$$

C5. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3x - y - 18\sqrt{3x - y} + 81 = 0, \\ 3x + y - 6\sqrt{3x + y} + 9 = 0; \end{cases} & \\ \text{б) } \begin{cases} x - 4y - 8\sqrt{x - 4y} + 16 = 0, \\ x + 4y - 16\sqrt{x + 4y} + 64 = 0. \end{cases} & \end{array}$$

C6. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{3}, \\ 3x + 7\sqrt{xy} + 4y + 6 = 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{5}, \\ 5x + 11\sqrt{xy} + 4y + 10 = 0. \end{cases} \end{array}$$

C7. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x\sqrt{\frac{y}{x}} = -\sqrt{10}, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x\sqrt{\frac{y}{x}} = -\sqrt{15}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases} \end{array}$$

C8. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt{x - 5} + \sqrt{y + 4} = 8, \\ (x - 5)\sqrt{y + 4} + (y + 4)\sqrt{x - 5} = 96; \end{cases} & \\ \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x + 3} + \sqrt{y - 6} = 9, \\ (x + 3)\sqrt{y - 6} + (y - 6)\sqrt{x + 3} = 72. \end{cases} & \end{array}$$

C9. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + \sqrt{xy} + 2y = -92, \\ \frac{x}{y} - 9\sqrt{\frac{x}{y}} - 10 = 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2x + \sqrt{xy} + y = -121, \\ \frac{x}{y} - 7\sqrt{\frac{x}{y}} - 8 = 0. \end{cases} \end{array}$$

C10. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} |2x - 5z| + \sqrt{3y - 4z} = 0, \\ 2x + 3y + z = 10; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} |4x - 7z| + \sqrt{2y - 3z} = 0, \\ 4x + 2y + z = 11. \end{cases} \end{array}$$

4.4. Системы, содержащие тригонометрические уравнения

Уровень А

A1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2\cos x + y = 1, \\ \cos x - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3\cos x + y = 4, \\ 2\cos x - y = 1. \end{cases}$

A2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + \sin y = 4, \\ 3x - \sin y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2\sin y = 3, \\ 3x - 2\sin y = 9. \end{cases}$

A3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5\operatorname{tg} x + 3y = -14, \\ 5\operatorname{tg} x - 2y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2\operatorname{ctg} x - y = -1, \\ 2\operatorname{ctg} x + 7y = 23. \end{cases}$

A4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4\sin x - \sin y = 3, \\ 3\sin x - 4\sin y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5\cos x - 6\cos y = 1, \\ 4\cos x - \cos y = -3. \end{cases}$

A5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 4\sin y = 5, \\ 3\operatorname{tg} x - 2\sin y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7\operatorname{tg} x - 2\cos y = -6, \\ 7\operatorname{tg} x + 4\cos y = -9. \end{cases}$

A6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0, \\ 3\sin y = x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0, \\ 2\sin y = -x. \end{cases}$

A7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3\cos^2 x = 4y - 1, \\ 3\sin^2 x = 4y - 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5\sin^2 x = 3y - 6, \\ 5\cos^2 x = 3y - 1. \end{cases}$

A8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (2x - 9\pi)(y + 4\pi) = 0, \\ \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos y} = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (2x - 5\pi)(y + 6\pi) = 0, \\ \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos y} = 1. \end{cases}$

A9. Решите систему уравнений и укажите в ответе решения, удовлетворяющие условию $0 \leq x \leq 2\pi$:

а) $\begin{cases} \cos^2 x - 3\cos x - 4 = 0, \\ 2\cos x - 3y = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0, \\ 2\sin x + 5y = 8. \end{cases}$

A10. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0, \\ 5\cos y + 8\cos x + 9 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0, \\ 3\cos y - 4\cos x - 5 = 0. \end{cases}$$

Уровень В

B1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \cos^2 x + 2\sin^2 y = 1, \\ \sin^2 x - 2\cos^2 y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

B2. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \sin^2 x + 11\cos y = 12, \\ \sin x + 11\cos y = 10; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin^2 x + 7\cos y = 8, \\ 2\sin x + 7\cos y = 5. \end{cases}$$

B3. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \cos(3x - 2y) = -1, \\ \sin(3x + 2y) = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \cos(4x + 5y) = -1, \\ \sin(4x - 5y) = 0. \end{cases}$$

B4. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2y + 3x = 7\pi, \\ x\sin \frac{2y + 3x}{2} = \pi; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x - 4y = 7\pi, \\ x\sin \frac{7x - 4y}{2} = -\pi. \end{cases}$$

B5. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x = 13\sin y, \\ \sqrt{13x\sin y} = \sin y + 14; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = 9\sin y, \\ \sqrt{9x\sin y} = \sin y + 10. \end{cases}$$

B6. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x = 3\sin y, \\ \sqrt{3x\sin y} = \sin y + 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = 5\cos y, \\ \sqrt{5x\cos y} = \cos y + 6. \end{cases}$$

B7. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x^2 = 9y^2, \\ \sin \frac{2x - 3y}{4} + \sin \frac{2x + 3y}{6} = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 25x^2 = 4y^2, \\ \sin \frac{5x - 2y}{9} + \sin \frac{5x + 2y}{7} = 1. \end{cases}$$

B8. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x - 4)(y + 5) = 0, \\ 3\cos \pi x + \sin \frac{\pi y}{2} = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (x - 6)(y + 11) = 0, \\ 3\cos \pi x + \sin \frac{\pi y}{2} = 2. \end{cases}$$

B9. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} 11\cos x = 5y - 4, \\ \cos^2 x = 5y + 8; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 7\cos x = 4y - 3, \\ \cos^2 x = 4y + 5. \end{cases}$$

B10. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x^2 = 4\sin y + 1, \\ x = 2\sin y - 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 = -8\sin y + 25, \\ x = 4\sin y - 5. \end{cases}$$

Уровень С

C1. Решите систему уравнений: а)
$$\begin{cases} x\sin 2y = 3, \\ x + \sin 2y = 4; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} x\sin 6y = -3, \\ x + \sin 6y = 2. \end{cases}$$

C2. Решите систему уравнений: а)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = y - 4, \\ \operatorname{ctg} x = 2y - 7; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = y + 2, \\ \operatorname{ctg} x = 2y + 5. \end{cases}$$

C3. Решите систему уравнений: а)
$$\begin{cases} x\operatorname{tg} y = 3, \\ x\operatorname{ctg} y = 1; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} x\operatorname{tg} y = 9, \\ x\operatorname{ctg} y = 3. \end{cases}$$

C4. Решите систему уравнений: а)
$$\begin{cases} x\sin y = 3, \\ x\cos y = -3; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} x\sin y = -5, \\ x\cos y = 5. \end{cases}$$

C5. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \cos x\sqrt{1 - 2\cos y} = 0, \\ \sin x\sqrt{1 - 2\sin y} = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin y\sqrt{1 + 2\cos x} = 0, \\ \cos y\sqrt{1 + 2\sin x} = 0. \end{cases}$$

C6. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos y = 2, \\ \sin^2 x + 5\cos y = 5; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin y = 2, \\ \sin^2 x + 3\sin y = 3. \end{cases}$$

C7. Решите систему уравнений: а)
$$\begin{cases} \sin x = y - 5, \\ \cos x = y - 6; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \sin x = y + 2, \\ \cos x = y + 1. \end{cases}$$

C8. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2}\sin y = x; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 - x + \sqrt{x^2 - x - 5} = 7, \\ 4\cos y = \sqrt{3}x. \end{cases}$$

C9. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \frac{4\sin^4 x - 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0, \\ \sqrt{y - 5} + 2\sin x = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{16\sin^4 x - 9}{\sqrt{\cos x}} = 0, \\ \sqrt{y + 6} + 2\sin x = 0. \end{cases}$$

C10. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{4\cos^4 x - 1}{\sqrt{-\sin x}} = 0, \\ \sqrt{y + 5} + 2\cos x = 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{16\cos^4 x - 9}{\sqrt{\sin x}} = 0, \\ \sqrt{y - 6} + 2\cos x = 0. \end{cases} \end{array}$$

4.5. Системы, содержащие показательные уравнения

Уровень А

A1. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 2^x - y = 3, \\ 2^x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x - y = 8, \\ 3^x + y = 10. \end{cases}$

A2. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 3^x - 4^y = -13, \\ 3^x + 4^y = 19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x - 5^y = 3, \\ 2^x + 5^y = 13. \end{cases}$

A3. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3 \cdot 7^x - 9^y = 12, \\ 5 \cdot 7^x + 9^y = 44; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2 \cdot 5^x - 8^y = 2, \\ 5 \cdot 5^x - 8^y = 17. \end{cases} \end{array}$$

A4. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 6x + 2^y = -8, \\ 7x - 2^y = -18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3^y = -11, \\ 7x + 3^y = 2. \end{cases}$

A5. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3^x + 4^y = 19, \\ 3^{x+1} + 4^{y-2} = 10; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 9^x + 5^y = 86, \\ 9^{x-2} + 5^{y-1} = 2. \end{cases} \end{array}$$

A6. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 5^x - 3^y = 2, \\ 5^{x+1} - 3^{y+2} = -2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 9^x + 2^y = 13, \\ 9^{x+1} - 2^{y+4} = 17. \end{cases} \end{array}$$

A7. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2^{x+4} \cdot 3^{y+4} = 36, \\ 3^{y+4} : 2^{x+2} = 9; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 4^{x+4} \cdot 3^{y+3} = 144, \\ 3^{y+5} : 4^{x+2} = 81. \end{cases} \end{array}$$

A8. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 20, \\ 2^x \cdot 9^y = 36; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^x \cdot 7^y = 56. \end{cases}$

A9. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x \cdot 13^{y-9} = -91, \\ x \cdot 2^{y-7} = -56; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x \cdot 15^{y-8} = 90, \\ x \cdot 2^{y-7} = 24. \end{cases} \end{array}$$

A10. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 2^x = y, \\ 4^x = 5y + 24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4^x = y, \\ 16^x = 3y + 4. \end{cases}$

Уровень В

B1. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 3^{2x+y^2} = 9^{x+2y}, \\ \frac{x-y+5}{y-4} = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6^{2x+y^2} = 36^{x+y}, \\ \frac{x-3y+4}{y-2} = 0. \end{cases}$

B2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x^2 - 4)(y - 5) = 0, \\ \frac{2^{x+y-8} - 64^{0.5}}{5^{x+2} - 1} = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2 - 4)(y + 1) = 0, \\ \frac{3^{x+y+5} - 81^{0.5}}{4^{x+2} - 1} = 0. \end{cases}$

B3. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 40, \\ 2^x \cdot 7^y = 56; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^x \cdot 6^y = 150, \\ 5^x \cdot 7^y = 175. \end{cases}$

B4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y^2 = 3 \cdot 5^x + 7x - 6, \\ y^2 = 2 \cdot 5^x + 7x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 = 3 \cdot 4^x - 7x - 1, \\ y^2 = 2 \cdot 4^x - 7x + 3. \end{cases}$

B5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^{15} = 11^y, \\ x^2 - 10x - 11 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^9 = 15^y, \\ x^2 - 13x - 30 = 0. \end{cases}$

B6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (9^x - 3^4)(9^x - 81^3) = 0, \\ 5^y = 9 - 2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (4^x - 2^8)(4^x - 16^6) = 0, \\ 3^y = 29 - 5x. \end{cases}$

B7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x + 13) \cdot 3^x = 2y, \\ (x + 13) \cdot 2^x = 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + 21) \cdot 2^x = 5y, \\ (x + 21) \cdot 5^x = 2y. \end{cases}$

B8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4 \cdot 11^x + y = 48, \\ 11^x + 4y = 27; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + y = 78, \\ 5^x - 3y = 16. \end{cases}$

B9. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2^x - 4 \cdot 2^y = -62, \\ 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^y = 70; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x + 3 \cdot 3^y = 54, \\ 4 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^y = 81. \end{cases}$

B10. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4^x + 3 \cdot 4^y = 28, \\ x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^x - 4 \cdot 3^y = 69, \\ x - y = 3. \end{cases}$

Уровень С

C1. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 144, \\ 2^x + 3^y = 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 200, \\ 5^x + 2^y = 33. \end{cases}$

C2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2^{x+3} \cdot 7^{y+1} = 14^{x+y}, \\ 7^x + 2^y = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^{x+2} \cdot 4^{y+1} = 12^{x+y}, \\ 4^x + 3^y = 13. \end{cases}$

C3. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x \cdot 3^{\sqrt{y}} = 12, \\ \sqrt{x} \cdot 3^y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \cdot 5^{\sqrt{y}} = 45, \\ \sqrt{x} \cdot 5^y = 15. \end{cases}$

C4. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 7x + 64^y = 36, \\ 7x + 8^y = -20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 9^y = 24, \\ 3x + 3^y = 18. \end{cases}$

C5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = 20, \\ 16^x \cdot 5^{y-1} = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 10, \\ 25^x \cdot 2^{y-1} = 25. \end{cases}$

C6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 12, \\ x + y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^x - 3^y = -78, \\ x + y = 5. \end{cases}$

C7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2^{x+1} \cdot 3^{y+2} = 2, \\ x - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^{x+3} \cdot 2^{y-3} = 3, \\ x - y = -5. \end{cases}$

C8. а) Найдите все пары $(x; y)$ положительных чисел x и y , являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} x^{4y-1} = 8, \\ x^{y+3} = 16. \end{cases}$

б) Найдите все пары $(x; y)$ положительных чисел x и y , являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} x^{3y-11} = 16, \\ x^{y-3} = 4. \end{cases}$

C9. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 9^{x-2} - 26 \cdot 3^{x+2-0.5y} = 3^{-x+2}, \\ y - x = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 16^{x-1} + 63 \cdot 4^{x+1-0.5y} = 4^{-x+1}, \\ y - x = 6. \end{cases}$

C10. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 2^{2x} - 3^y = -17, \\ 2^x - 3^2 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2x} - 5^y = -16, \\ 3^x - 5^2 = -2. \end{cases}$

4.6. Системы, содержащие логарифмические уравнения

Уровень А

A1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_3(x + 2y) = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_8(3x + y) = 1, \\ y - x = 2. \end{cases}$

A2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_3(x - y) = 2, \\ \log_{11}(x + y) = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_2(x - y) = 3, \\ \lg(x + y) = 1. \end{cases}$

A3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + \log_7 y = -17, \\ 3x - \log_7 y = -19; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x + \log_5 y = 26, \\ 4x - \log_5 y = 22. \end{cases}$

A4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2\log_2 x + 5y = -8, \\ 8\log_2 x + 7y = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2\log_5 x - y = 2, \\ 8\log_5 x - 7y = 2. \end{cases}$

A5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = \log_5 11 + \log_5 6, \\ \log_5(x + y) = \log_5 17; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_7 x + \log_7 y = \log_7 8 + \log_7 5, \\ \log_7(x + y) = \log_7 13. \end{cases}$

A6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5\log_7 x + \log_9 y = 6, \\ 7\log_7 x - \log_9 y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3\log_7 x + 4\log_5 y = 7, \\ 2\log_7 x + \log_5 y = 3. \end{cases}$

A7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y + 4y = 10, \\ \log_3 x + \log_3 y + y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y + 6y = 29, \\ \log_5 x + \log_5 y + y = 4. \end{cases}$

A8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_{y-2}(x - 4) = 1, \\ x^2 - 11y = -8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{y-5}(x + 3) = 1, \\ x^2 - 2y = -8. \end{cases}$

A9. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} (x-3)(y-6)(x-7) = 0, \\ \log_{x-2} 5 \cdot \log_4(y-5) = 3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (x-2)(y-6)(x-4) = 0, \\ \log_{x-1} 3 \cdot \log_6(y-5) = 2. \end{cases}$$

A10. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \log_3(x-1) \cdot \log_3(y-4) = 0, \\ \frac{3x-2y}{(x-1)(y-3)} = 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_5(x-5) \cdot \log_4(y-2) = 0, \\ \frac{4x-10y}{(x-5)(y-1)} = 1. \end{cases}$$

Уровень В

B1. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} 4\log_7 xy = \log_7 x^4, \\ 2x + 3y = -20; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 6\log_6 xy = \log_6 x^6, \\ 3x + 7y = 19. \end{cases}$$

B2. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \log_3^2 x - \log_7 y = 3, \\ \log_3 x - \log_7 y = 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_7^2 x - \log_2 y = 2, \\ 3\log_7 x - \log_2 y = 4. \end{cases}$$

B3. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x^2 + 2\log_x y = 6, \\ 3x + 2\log_x y = 8; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 - 3\log_x y = 30, \\ 7x - 3\log_x y = 36. \end{cases}$$

B4. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} (x-7)(y-8) = 0, \\ \log_7(x+y-8) + \log_8(1-xy+6y) = \log_7 x; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (x-5)(y-3) = 0, \\ \log_5(x+y-3) + \log_3(-2-xy+4y) = \log_5 x. \end{cases}$$

B5. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} (2x-3y)\log_5(3x+2y-7) = 0, \\ \frac{4x-y}{3x+2y-8} = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (3x-2y)\log_3(5x+y-3) = 0, \\ \frac{12x+y}{5x+y-4} = 3. \end{cases}$$

B6. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \log_{2x-3y}(4x-y) = 1, \\ \log_3(2x-3y) \cdot \log_2(3x+2y) = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_{4x+7y}(9x+2y) = 1, \\ \log_5(4x+7y) \cdot \log_9(6x-5y) = 0. \end{cases}$$

В7. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - xy + 12 = 0, \\ \frac{(y-6)(y-7)}{\log_x - 2(y-5)} = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - xy + 20 = 0, \\ \frac{(y-5)(y-9)}{\log_x - 3(y-4)} = 0. \end{cases}$$

В8. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_3^2 x + \log_2 y = 4, \\ 4\log_3 x + \log_2 y = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_7^2 x - \log_2 y = 2, \\ 3\log_7 x - \log_2 y = 4. \end{cases}$$

В9. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_5(2x + 3y)^6 = 6, \\ \frac{2x - 3y + 15}{2x + 3y - 5} = -2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_3(5x + 7y)^4 = 4, \\ \frac{5x - 7y + 15}{5x + 7y - 3} = -3. \end{cases}$$

В10. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_5 x + \log_2 y^4 = 13, \\ \log_5 x^4 + \log_{\frac{1}{2}} y = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_2 x + \log_6 y^3 = 7, \\ \log_2 x^3 + \log_{\frac{1}{6}} y = 11. \end{cases}$$

Уровень С

С1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_2(x+1) = 64 \cdot 2^y, \\ 2^{-y} + \log_2(x+1) = 16; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_3(x-2) = 25 \cdot 5^y, \\ 5^{-y} + \log_3(x-2) = 10. \end{cases}$$

С2. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_2(5xy) - \log_2(-5x) = 2, \\ x^2 + 3y + 11 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_2(3xy) - \log_2(-3x) = 4, \\ x^2 + 6y + 95 = 0. \end{cases}$$

С3. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_x 2 + \log_y 3 = \frac{3}{2}, \\ \log_2 x + \log_3 y = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_x 3 + \log_y 4 = \frac{1}{4}, \\ \log_3 x + \log_4 y = -2. \end{cases}$$

С4. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (y-1)\log_5 x = 4, \\ (y-1)\log_x 5 = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (y-6)\log_2 x = 25, \\ (y-6)\log_x 2 = 1. \end{cases}$$

С5. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 3\log_x y = 30, \\ 7x - 3\log_x y = 36; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - 9\log_x y = -9, \\ 4x - 9\log_x y = -6. \end{cases}$$

С6. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \log_2(xy) = 5, \\ x + y - 33 = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_6(xy) = 2, \\ x + y - 37 = 0. \end{cases}$$

С7. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \log_{\sqrt[3]{3}} x + \log_{\sqrt[3]{3}} y = 3, \\ \log_2(x + y) = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_{\sqrt[4]{2}} x + \log_{\sqrt[4]{2}} y = 4, \\ \log_3(x + y) = 1. \end{cases}$$

С8. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \lg \frac{y-2}{x-3} = 0, \\ \log_6(x^2 + y^2 + 23) = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \lg \frac{y+1}{x-5} = 0, \\ \log_4(x^2 + y^2 + 38) = 3. \end{cases}$$

С9. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4, \\ 2^x \cdot 3^y = 486; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(y - x) = 2, \\ 3^x \cdot 4^y = 768. \end{cases}$$

С10. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_x y + 2 \log_y x = 2, \\ 5\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

5.1. Целые неравенства и системы целых неравенств

Уровень А

A1. Решите неравенство: а) $5x - 7 \geq 7x - 5$; б) $3x - 8 \geq 8x - 3$.

A2. Решите неравенство:

а) $3(2x - 3) - 2(3x - 2) \leq 1 - 4x$;

б) $4(3x - 4) - 3(4x - 3) \leq 1 - 5x$.

A3. Решите неравенство:

а) $(2 - x)(\sqrt{5} - \sqrt{7}) > 0$;

б) $(1 - x)(\sqrt{3} - \sqrt{5}) > 0$.

A4. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{7} - \sqrt{10})x < \frac{6}{\sqrt{7} + \sqrt{10}}$;

б) $(\sqrt{5} - \sqrt{7})x < \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{7}}$.

A5. Решите неравенство:

а) $(2x - 3)(5x + 2) \geq (2x - 3)(5x - 2)$;

б) $(3x - 1)(4x + 3) \leq (3x - 1)(4x - 3)$.

A6. а) Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$5x - 6 < 2(3 - x) - 3x.$$

б) Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$x + 4 > -5(3 + x) - x.$$

A7. Решите неравенство:

а) $\frac{4 + 5x}{2} > 3x + 1$;

б) $\frac{3 + 7x}{4} > 2x + 1$.

A8. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{3} - \frac{3 - x}{5} \geq \frac{x + 12}{15} - \frac{9}{5}$;

б) $\frac{x}{5} + \frac{x + 2}{3} \geq \frac{4x + 5}{15} - \frac{2}{3}$.

A9. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} -0,7x \leq 2,1, \\ 2,1x < 0,7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -0,6x \leq 2,4, \\ 2,4x < 0,6. \end{cases}$

A10. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{2x + 5}{5} > \frac{5x + 2}{2}, \\ \frac{x + 2}{5} < \frac{x + 5}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{3x + 2}{2} < \frac{2x + 3}{3}, \\ \frac{x + 2}{3} < \frac{x + 3}{2}. \end{cases}$

Уровень В

B1. Решите неравенство: а) $10x^2 + 7x \leq 0$; б) $3x^2 - 8x \leq 0$.

- В2.** Решите неравенство: а) $36x^2 - 25 \geq 0$; б) $49x^2 - 16 \geq 0$.
- В3.** Решите неравенство: а) $2x^2 - 9x - 5 < 0$; б) $5x^2 + 9x - 2 < 0$.
- В4.** Решите неравенство: а) $3x^2 - x - 24 > 0$; б) $6x^2 + x - 15 > 0$.
- В5.** Решите систему неравенств:
- а) $\begin{cases} 3x^2 - 14x + 8 < 0, \\ 5x + 2 > 2x + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2 - 11x + 6 < 0, \\ 4x + 3 > 3x + 4. \end{cases}$
- В6.** Решите неравенство: а) $(x - 2)(x - 1)^2 \geq 0$; б) $(x - 6)(x + 2)^2 \geq 0$.
- В7.** Решите неравенство:
- а) $(x^2 - 6x + 5)(x + 3)^2 \leq 0$;
 б) $(x^2 - 5x + 4)(x + 2)^2 \leq 0$.
- В8.** а) 1) Решите неравенство $x^2 + 2,2x < 2,4$ (1).
 2) Решите неравенство $1,6 \geq x^2 + 1,2x$ (2).
 3) Найдите все решения неравенства (2), не являющиеся решениями неравенства (1).
 б) 1) Решите неравенство $x^2 + 0,5x \leq 10,5$ (1).
 2) Решите неравенство $3,5 > x^2 + 2,5x$ (2).
 3) Найдите все решения неравенства (1), не являющиеся решениями неравенства (2).
- В9.** а) Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{250} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{14}{25}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 15 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 м?
- б) Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{500} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{8}{25}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 10 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 м?

В10. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ — постоянная, r (м) — радиус аппарата, $\rho = 1000$ кг/м³ — плотность воды, а $g = 10$ Н/кг — ускорение свободного падения. Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше чем:

а) 656250 Н;

б) 5250000 Н.

Ответ выразите в метрах.

Уровень С

С1. Решите неравенство:

а) $(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)^3 \leq 0$;

б) $(x+1)(x+2)^3(x+5)^4(x+6)^5 \leq 0$.

С2. Решите неравенство:

а) $|3x^2 - 11x + 6|(6x^2 - 11x + 3) \geq 0$;

б) $|5x^2 - 12x + 4|(4x^2 - 12x + 5) \geq 0$.

С3. Решите неравенство:

а) $36x^4 + 35x^2 - 1 \leq 0$;

б) $49x^4 + 48x^2 - 1 \leq 0$.

С4. Решите неравенство:

а) $(3x^2 - 2x)^2 + 12x + 5 < 18x^2$; б) $16(x^2 + 4x)^2 < 8x^2 + 32x + 63$.

С5. Решите неравенство:

а) $(9x^4 - 9x - 10)^3 \leq (8x^4 - 9x - 9)^3$;

б) $(8x^4 - 8x + 7)^3 \leq (7x^4 - 8x + 23)^3$.

С6. Решите неравенство:

а) $(3x^2 - 4x + 1)^4 \geq (2x^2 - 3x + 3)^4$;

б) $(3x^2 - 7x + 2)^4 \geq (2x^2 - 5x + 10)^4$.

С7. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} |x^2 - 121|(16 - x^2) \geq 0, \\ x^2 + 15x + 44 \leq 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} |x^2 - 144|(9 - x^2) \geq 0, \\ x^2 + 15x + 36 \leq 0. \end{cases}$$

С8. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} 2(2x + 3)^4 \geq (2x + 3)^3 + (2x + 3)^5, \\ x^2 + 3x + 2 \leq 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2(3x + 7)^4 \geq (3x + 7)^3 + (3x + 7)^5, \\ x^2 + 5x + 6 \leq 0. \end{cases}$$

- С9.** а) Наибольшее из чисел m и n обозначается $\max(m; n)$. Если числа равны, то $\max(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых $\max(6x + 1; x^2 + 3) < 7$.
- б) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m; n)$. Если числа равны, то $\min(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых $\min(3x + 20; x^2 + 7) > 11$.
- С10.** а) Сравните каждое из чисел m , n и k с числом 3, если известно, что $(m - 3)(n - 3) < 0$, $(m - 3)(k - 3) > 0$ и $(m - 3)(n - 3) \times (k - 3) < 0$.
- б) Сравните каждое из чисел x , y и z с числом 5, если известно, что $(x - 5)(y - 5) > 0$, $(x - 5)(z - 5) > 0$ и $(x - 5)(y - 5) \times (z - 5) < 0$.

5.2. Дробно-рациональные неравенства и системы, содержащие дробно-рациональные неравенства

Уровень А

- A1.** Решите неравенство: а) $\frac{5}{3x+2} \leq 0$; б) $\frac{4}{2x+3} \geq 0$.
- A2.** Решите неравенство: а) $\frac{2x-1}{4x^2+3} > 0$; б) $\frac{3x-2}{5x^2+7} < 0$.
- A3.** Решите неравенство: а) $\frac{7x^2+1}{2-3x} > 0$; б) $\frac{6x^2+1}{3-2x} < 0$.
- A4.** Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \frac{3}{4x+5} > 0, \\ 3x-8 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{3x+7} > 0, \\ 2x-5 < 0. \end{cases}$
- A5.** Решите систему неравенств:
- а) $\begin{cases} \frac{2x-5}{5x^2+9} < 0, \\ 4x-1 > 2x+3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3x-2}{9x^2+5} < 0, \\ 3x-2 > 2x-7. \end{cases}$
- A6.** Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \frac{5}{5-3x} > 0, \\ \frac{5-6x}{3} \geq \frac{2}{5}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{4}{4-5x} > 0, \\ \frac{4-3x}{2} \geq \frac{3}{5}. \end{cases}$
- A7.** Решите систему неравенств:
- а) $\begin{cases} \frac{11}{5-6x} < 0, \\ 0,2x-0,1 > 0,3x-0,2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{5}{3-8x} < 0, \\ 0,3x-0,2 > 0,4x-0,3. \end{cases}$

- A8.** Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \frac{11}{4-x} \geq 0, \\ \frac{2}{2-5x} < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{9}{3-x} < 0, \\ \frac{3}{3-4x} < 0. \end{cases}$
- A9.** Решите неравенство: а) $\frac{3}{x^2+5} \geq \frac{2x}{x^2+5};$ б) $\frac{2}{x^2+4} \leq \frac{3x}{x^2+4}.$
- A10.** Решите неравенство: а) $\frac{4x^2}{4x+3} < -\frac{7}{4x+3};$ б) $\frac{5x^2}{5x-4} > -\frac{9}{5x-4}.$

Уровень В

- B1.** Решите неравенство: а) $\frac{4}{4x^2-9} > 0;$ б) $\frac{9}{9x^2-4} < 0.$
- B2.** Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \frac{14}{16x^2-9} > 0, \\ 4x-3 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{19}{4x^2-25} > 0, \\ 2x-5 < 0. \end{cases}$
- B3.** Решите неравенство: а) $\frac{2}{x-3} \leq 1;$ б) $\frac{3}{x-4} \leq 1.$
- B4.** Решите неравенство: а) $\frac{2x^2}{3x+7} \leq 0;$ б) $\frac{3x^2}{2x+5} \leq 0.$
- B5.** Решите неравенство: а) $\frac{(x+4)^2}{x^2-9} \leq 0;$ б) $\frac{(x+7)^2}{x^2-36} \leq 0.$
- B6.** Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \frac{67}{x} \geq 1, \\ \frac{x-67}{x-57} \geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{89}{x} \geq 1, \\ \frac{x-89}{x-79} \geq 0. \end{cases}$
- B7.** Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \frac{2}{x-5} < 1, \\ \frac{5}{x-4} > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{x-6} < 1, \\ \frac{6}{x-5} > 1. \end{cases}$
- B8.** Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} x < \frac{16}{x}, \\ x > \frac{121}{x}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < \frac{36}{x}, \\ x > \frac{144}{x}. \end{cases}$
- B9.** а) Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 42$ см. Расстояние d_1 от лин-

зы до лампочки может изменяться в пределах от 90 до 110 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 51 до 78 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. На каком наименьшем рас-

стоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ выразите в сантиметрах.

б) Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 75$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 150 до 250 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 100 до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. На каком наименьшем

расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ выразите в сантиметрах.

- В10.** Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой f_0 (Гц). Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f (Гц) больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$,

где c (м/с) — скорость звука. Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем:

- а) на 10 Гц при $f_0 = 590$ Гц; б) на 8 Гц при $f_0 = 296$ Гц.
С какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с? Ответ дайте в метрах в секунду.

Уровень С

- С1.** Решите двойное неравенство:

$$\text{а) } \frac{4}{x-4} - \frac{6}{x+2} \leq \frac{4}{x-4} - \frac{5}{x+2} \leq \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2};$$

$$\text{б) } \frac{3}{x-3} - \frac{7}{x+4} < \frac{3}{x-3} - \frac{6}{x+4} < \frac{2}{x-3} - \frac{6}{x+4}.$$

C2. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} \leq \frac{2}{x+4}$; б) $\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+4} \geq \frac{2}{x+5}$.

C3. Решите неравенство: а) $\frac{x-3}{x-2} + \frac{x-1}{x-3} \leq 2$; б) $\frac{x-7}{x-4} + \frac{x-1}{x-6} \leq 2$.

C4. Решите неравенство:

а) $\frac{3}{x^2+8x+17} + \frac{4}{x^2+8x+18} \geq 5$; б) $\frac{2}{x^2+10x+27} + \frac{5}{x^2+10x+26} \geq 6$.

C5. Наибольшее из чисел m и n обозначается $\max(m; n)$. Если числа равны, то $\max(m; n) = m = n$. Найдите все значения x , при каждом из которых:

а) $\max\left(\frac{1}{6x-13}; \frac{1}{6-13x}\right) > 0$; б) $\max\left(\frac{1}{5x-12}; \frac{1}{5-12x}\right) > 0$.

C6. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} (x^2 + 2x - 15)^2 \leq 0, \\ \frac{1}{2x^{15} + 15x - 17} < 0; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} (x^2 + 2x - 18)^2 \leq 0, \\ \frac{1}{3x^{17} + 11x - 13} < 0. \end{cases}$$

C7. Решите неравенство:

а) $\frac{72}{(x^2+4x-5)^2} + \frac{17}{x^2+4x-5} + 1 \geq 0$;
б) $\frac{12}{(x^2+6x+5)^2} + \frac{7}{x^2+6x+5} + 1 \geq 0$.

C8. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} \frac{81}{x^4} - \frac{82}{x^2} + 1 \leq 0, \\ \frac{225}{(x^2-10x)^2} + \frac{34}{x^2-10x} + 1 \geq 0; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \frac{49}{x^4} - \frac{50}{x^2} + 1 \leq 0, \\ \frac{112}{(x^2-8x)^2} + \frac{23}{x^2-8x} + 1 \geq 0. \end{cases}$$

C9. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{3x-4}{x+2}\right)^2 + \left(\frac{3x+4}{x-2}\right)^2 \leq 2 \frac{9x^2-16}{x^2-4}$;
б) $\left(\frac{2x-3}{x+3}\right)^2 + \left(\frac{2x+3}{x-3}\right)^2 \leq 2 \frac{4x^2-9}{x^2-9}$.

C10. Положительным или отрицательным является число b , если:

а) $\frac{1}{(b+1)(b+4)(b-5)} > 0$, а $\frac{1}{(b+3)(b+4)(b-5)} < 0$;
б) $\frac{1}{(b+5)(b-7)(b-15)} > 0$, а $\frac{1}{(b+4)(b-7)(b-15)} < 0$.

5.3. Иррациональные неравенства и системы, содержащие иррациональные неравенства

Уровень А

- A1. Решите неравенство: а) $\sqrt[7]{4x-9} \geq 0$; б) $\sqrt[5]{7-4x} \geq 0$.
- A2. Решите неравенство: а) $\sqrt[3]{5-2x} > 0$; б) $\sqrt[9]{2x+7} > 0$.
- A3. Решите неравенство: а) $\sqrt[13]{5x+9} \leq 0$; б) $\sqrt[11]{6-5x} \leq 0$.
- A4. Решите неравенство: а) $\sqrt[5]{-11-4x} < 0$; б) $\sqrt[3]{-13+4x} < 0$.
- A5. Решите неравенство: а) $\sqrt[6]{7x-8} \geq 0$; б) $\sqrt[4]{-3-7x} \geq 0$.
- A6. Решите неравенство: а) $\sqrt{7-6x} > 0$; б) $\sqrt{9x+8} > 0$.
- A7. Решите неравенство: а) $\sqrt[4]{-3x-5} \leq 0$; б) $\sqrt[6]{11-6x} \leq 0$.
- A8. Решите неравенство: а) $(7x-1)^{\frac{1}{7}} \geq 0$; б) $(1-9x)^{\frac{1}{9}} \geq 0$.
- A9. Решите неравенство: а) $(11-x)^{\frac{1}{11}} > 0$; б) $(x+13)^{\frac{1}{13}} > 0$.
- A10. Решите неравенство: а) $(14-x)^{\frac{1}{14}} \leq 0$; б) $(x-15)^{\frac{1}{15}} \leq 0$.

Уровень В

- B1. Решите неравенство: а) $\sqrt{x^2-5x+1} > 5$; б) $\sqrt{x^2-4x-9} > 6$.
- B2. Решите неравенство:
а) $\sqrt{3x^2-14x+51} \geq 6$; б) $\sqrt{4x^2-29x+61} \geq 3$.
- B3. Решите неравенство: а) $\sqrt{x^2-144} \leq 5$; б) $\sqrt{x^2-25} \leq 12$.
- B4. Решите неравенство: а) $\sqrt{x^2-2x-15} < 3$; б) $\sqrt{x^2-4x-5} < 4$.
- B5. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \sqrt{x-3} \leq 2, \\ \sqrt{12-x} \geq 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x-4} \leq 9, \\ \sqrt{8-x} \geq 2. \end{cases}$
- B6. Решите неравенство: а) $\sqrt{x^4-2x+6} \geq x^2$; б) $\sqrt{x^4-4x+8} \geq x^2$.
- B7. Решите неравенство:
а) $\sqrt{x^2-17x-29} \geq 3|x+2|$; б) $\sqrt{x^2-31x+45} \geq |2x-5|$.

В8. Решите неравенство: а) $\sqrt{\frac{5x-3}{x-3}} \leq 3$; б) $\sqrt{\frac{3x+38}{3x+5}} \leq 2$.

В9. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \text{где } c = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с} — \text{ скорость света,}$$

l_0 (м) — длина покоящейся ракеты, а v (км/с) — скорость ракеты. Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более:

а) 3 м, если $l_0 = 5$ м;

б) 8 м, если $l_0 = 10$ м?

Ответ выразите в километрах в секунду.

В10. а) Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км —

радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 6,4 км. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 15 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 8 км?

б) Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км —

радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 9,6 км?

Уровень С

С1. Решите неравенство:

а) $\sqrt{5x+3} > \sqrt{6x-1}$;

б) $\sqrt{4x+7} > \sqrt{8x+3}$.

С2. Решите неравенство:

а) $2\sqrt{20x-9} < 4x+3$;

б) $2\sqrt{12x-5} < 4x+1$.

С3. Решите неравенство:

а) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} > 5x - 3$;

б) $\sqrt{12x^2 + 4x - 1} > 10x - 3$.

С4. Решите неравенство:

а) $\sqrt{24x^2 - 2x - 1} \leq 2x + 1$;

б) $\sqrt{6x^2 - 5x - 25} \leq x + 5$.

С5. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x + 9} - \sqrt{x + 1} \geq \sqrt{x + 4}$;

б) $\sqrt{2x + 5} - \sqrt{x - 1} \geq \sqrt{x + 2}$.

С6. Решите неравенство:

а) $(x^2 - 7x + 6)\sqrt{-3x^2 - 4x + 4} \leq 0$;

б) $(x^2 - 9x + 14)\sqrt{-3x^2 + 9x - 6} \leq 0$.

С7. Решите неравенство: а) $\frac{(x^2 - 4)\sqrt{7x - x^2}}{2x^2 - 19x + 35} \leq 0$; б) $\frac{(x^2 - 9)\sqrt{6x - x^2}}{2x^2 - 19x + 42} \leq 0$.

С8. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{7x + 1} - x - 1)(\sqrt{x + 20} - x) \leq 0$;

б) $(\sqrt{7x + 4} - x - 2)(\sqrt{x + 6} - x) \leq 0$.

С9. Решите неравенство:

а) $\sqrt{\frac{3x-1}{5x-2}} + \sqrt{\frac{5x-2}{x-5}} \geq 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{3x-1}{x-5}}$;

б) $\sqrt{\frac{x+3}{3x+1}} + \sqrt{\frac{3x+1}{4x-5}} \geq 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{x+3}{4x-5}}$.

С10. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x + 3} - 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x + 2}} \geq 4$;

б) $\sqrt{x + 7} - 4\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 19 - 8\sqrt{x + 3}} \geq 6$.

5.4. Тригонометрические неравенства и системы, содержащие тригонометрические неравенства

Уровень А

А1. Решите неравенство: а) $\sin x \geq 1$;

б) $\sin x \leq -1$.

А2. Решите неравенство: а) $\sin x < -\frac{1}{2}$;

б) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- A3. Решите неравенство: а) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x \leq \frac{1}{2}$.
- A4. Решите неравенство: а) $\cos x > -1$; б) $\cos x < 1$.
- A5. Решите неравенство: а) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- A6. Решите неравенство: а) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; б) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- A7. Решите неравенство: а) $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- A8. Решите неравенство: а) $\operatorname{tg} x \leq -1$; б) $\operatorname{tg} x \leq 1$;
- A9. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \sin x > -\frac{1}{2}, \\ \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$
- A10. Решите систему неравенств:
- а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}, \\ \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1, \\ \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Уровень В

- B1. Решите неравенство:
- а) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \geq -0,5$; б) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- B2. Решите неравенство:
- а) $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\left(5x + \frac{2\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- B3. Решите неравенство:
- а) $\cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- B4. Решите неравенство:
- а) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(5x - \frac{4\pi}{3}\right) \leq -0,5$.
- B5. Решите неравенство:
- а) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{11\pi}{6}\right) \geq -\sqrt{3}$.

С3. Решите неравенство:

а) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} > 5x - 3$;

б) $\sqrt{12x^2 + 4x - 1} > 10x - 3$.

С4. Решите неравенство:

а) $\sqrt{24x^2 - 2x - 1} \leq 2x + 1$;

б) $\sqrt{6x^2 - 5x - 25} \leq x + 5$.

С5. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x + 9} - \sqrt{x + 1} \geq \sqrt{x + 4}$;

б) $\sqrt{2x + 5} - \sqrt{x - 1} \geq \sqrt{x + 2}$.

С6. Решите неравенство:

а) $(x^2 - 7x + 6)\sqrt{-3x^2 - 4x + 4} \leq 0$;

б) $(x^2 - 9x + 14)\sqrt{-3x^2 + 9x - 6} \leq 0$.

С7. Решите неравенство: а) $\frac{(x^2 - 4)\sqrt{7x - x^2}}{2x^2 - 19x + 35} \leq 0$; б) $\frac{(x^2 - 9)\sqrt{6x - x^2}}{2x^2 - 19x + 42} \leq 0$.

С8. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{7x + 1} - x - 1)(\sqrt{x + 20} - x) \leq 0$;

б) $(\sqrt{7x + 4} - x - 2)(\sqrt{x + 6} - x) \leq 0$.

С9. Решите неравенство:

а) $\sqrt{\frac{3x-1}{5x-2}} + \sqrt{\frac{5x-2}{x-5}} \geq 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{3x-1}{x-5}}$;

б) $\sqrt{\frac{x+3}{3x+1}} + \sqrt{\frac{3x+1}{4x-5}} \geq 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{x+3}{4x-5}}$.

С10. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+11} - 6\sqrt{x+2} \geq 4$;

б) $\sqrt{x+7} - 4\sqrt{x+3} + \sqrt{x+19} - 8\sqrt{x+3} \geq 6$.

5.4. Тригонометрические неравенства и системы, содержащие тригонометрические неравенства

Уровень А

А1. Решите неравенство: а) $\sin x \geq 1$;

б) $\sin x \leq -1$.

А2. Решите неравенство: а) $\sin x < -\frac{1}{2}$;

б) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- A3. Решите неравенство: а) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x \leq \frac{1}{2}$.
- A4. Решите неравенство: а) $\cos x > -1$; б) $\cos x < 1$.
- A5. Решите неравенство: а) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- A6. Решите неравенство: а) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; б) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- A7. Решите неравенство: а) $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- A8. Решите неравенство: а) $\operatorname{tg} x \leq -1$; б) $\operatorname{tg} x \leq 1$;
- A9. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \sin x > -\frac{1}{2}, \\ \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$
- A10. Решите систему неравенств:
- а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}, \\ \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1, \\ \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Уровень В

- B1. Решите неравенство:
- а) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \geq -0,5$; б) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- B2. Решите неравенство:
- а) $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\left(5x + \frac{2\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- B3. Решите неравенство:
- а) $\cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- B4. Решите неравенство:
- а) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(5x - \frac{4\pi}{3}\right) \leq -0,5$.
- B5. Решите неравенство:
- а) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{11\pi}{6}\right) \geq -\sqrt{3}$.

В6. Решите неравенство:

а) $\operatorname{ctg}\left(5x - \frac{8\pi}{3}\right) > -\frac{1}{\sqrt{3}};$

б) $\operatorname{ctg}\left(10x + \frac{9\pi}{4}\right) > -1.$

В7. Решите неравенство:

а) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3};$

б) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{7\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$

В8. Решите неравенство:

а) $\cos 2x + 0,5 \leq \cos^2 x;$

б) $\cos 2x + \sin^2 x \leq 0,25.$

В9. Решите неравенство:

а) $2\cos^2 x + \cos 2x \geq \sqrt{3} + 1;$

б) $1 + \cos 2x \geq \sqrt{2} + 2\sin^2 x.$

В10. Решите неравенство:

а) $1 + \sqrt{2} + 2\cos 2x + \sin 2x \geq (\sin x + \cos x)^2;$

б) $1 + \sqrt{3} + 2\cos 2x - \sin 2x \geq (\sin x - \cos x)^2.$

Уровень С

С1. Решите неравенство:

а) $4\sin 5x \cos 3x \leq 2\sin 8x + \sqrt{3};$

б) $4\sin 7x \cos 5x + \sqrt{3} \leq 2\sin 12x.$

С2. Решите неравенство:

а) $2\cos 7x \cos 6x \leq 0,5 + \cos 13x;$

б) $2\cos 8x \cos 7x + 0,5 \leq \cos 15x.$

С3. Решите неравенство:

а) $4\cos 4x \cos 6x \geq 2\cos 2x + \sqrt{3};$

б) $4\cos 3x \cos 7x + \sqrt{3} \leq 2\cos 4x.$

С4. Решите неравенство:

а) $4\sin 3x \sin 2x + 1 < 2\cos x;$

б) $4\sin 4x \sin 3x < 2\cos x + 1.$

С5. Решите неравенство:

а) $2\sin 5x \sin 3x + \cos 8x > 0,3;$

б) $2\sin 7x \sin 2x + \cos 9x > 0,2.$

С6. Решите неравенство: а) $\sin 4x > \cos 4x;$ б) $\cos 2x > \sin 2x.$

С7. Решите неравенство: а) $\sin x < \sqrt{3} \cos x;$ б) $\cos x < \sqrt{3} \sin x.$

С8. Решите неравенство: а) $\sin x + \cos x \geq 1;$ б) $\sin x - \cos x \leq 1.$

С9. Решите неравенство:

а) $\sin x - \sqrt{3} \cos x \leq \sqrt{2};$

б) $\sqrt{3} \sin x + \cos x \geq \sqrt{2}.$

C10. Решите неравенство:

а) $|\sin 5x| \leq |\cos 5x|$;

б) $|\sin 7x| \geq |\cos 7x|$.

5.5. Показательные неравенства и системы, содержащие показательные неравенства

Уровень А

- A1.** Решите неравенство: а) $2^x \leq 4$; б) $3^x \leq 27$.
A2. Решите неравенство: а) $5^x \geq 0,04$; б) $4^x \geq 0,25$.
A3. Решите неравенство: а) $9^x < 27$; б) $16^x < 64$.
A4. Решите неравенство: а) $8^x > 4$; б) $125^x > 25$.
A5. Решите неравенство: а) $\left(\frac{1}{36}\right)^x < 6$; б) $\left(\frac{1}{16}\right)^x < 2$.
A6. Решите неравенство: а) $(3,45)^x > 1$; б) $(5,43)^x > 1$.
A7. Решите неравенство: а) $(2,5)^x < 0,4$; б) $(1,25)^x < 0,8$.
A8. Решите неравенство: а) $(0,1)^x \geq 100$; б) $(0,2)^x \geq 25$.
A9. Решите неравенство: а) $2^{x^2-3x} \leq 0,25$; б) $10^{x^2+3x} \leq 0,01$.
A10. Решите неравенство: а) $2^x \cdot 5^x \leq 100$; б) $3^x \cdot 4^x \leq 144$.

Уровень В

- B1.** Решите неравенство: а) $49^{x^2} > 7^{x+1}$; б) $8^{x^2} > 2^{x+2}$.
B2. Решите неравенство:
а) $5^{x^2+4x} < (0,2)^{-4x-9}$; б) $2^{x^2+5x} < (0,5)^{-5x-16}$.
B3. Решите неравенство: а) $15^x < 25 \cdot 3^x$; б) $6^x < 9 \cdot 2^x$.
B4. Решите неравенство: а) $4^x \cdot 2^{x^2} \geq 8$; б) $9^x \cdot 3^{x^2} \geq 27$.
B5. Решите неравенство:
а) $17^{x-19} \leq 18^{x-19}$; б) $14^{x-16} \leq 15^{x-16}$.
B6. Решите неравенство:
а) $4 \cdot 3^{x+5} \geq 9 \cdot 2^{x+5}$; б) $16 \cdot 5^{x-8} \geq 25 \cdot 4^{x-8}$.
B7. Решите систему неравенств:
а) $\begin{cases} 4^{2x+11} \leq 64, \\ 7^{x^2+2x-35} < 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{2x+7} \leq 8, \\ 6^{x^2+4x-21} < 1. \end{cases}$
B8. Решите неравенство:
а) $5^{x-3} + 5^{x-2} + 5^{x-1} \geq 155$; б) $6^{x-2} + 6^{x-1} + 6^x \geq 258$.

- В9.** В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада.
- а) В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 2 мин. Найдите, через какое наименьшее время масса изотопа не будет превосходить 2,5 мг.
- б) В начальный момент времени масса изотопа 80 мг. Период его полураспада составляет 15 мин. Найдите, через какое наименьшее время масса изотопа не будет превосходить 10 мг.
- В10.** Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па) — давление в газе, V (м^3) — объём газа, a — положительная константа.
- а) При каком наименьшем значении константы a увеличение вчетверо объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к уменьшению давления не менее чем в 8 раз?
- б) При каком наименьшем значении константы a уменьшение вчетверо объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее чем в 2 раза?

Уровень С

- С1.** Решите неравенство:
а) $4^{x+1} + 4^{x-0,5} - 2^{2x-4} \leq 284$; б) $4^{x-1} + 4^{x-0,5} - 2^{2x-5} \leq 184$.
- С2.** Решите неравенство:
а) $5 \cdot 3^x + 10^x > 2 \cdot 3^{x+1} + 10^{x-1} + 3^{x+2}$;
б) $2^{x+5} + 5^{x+4} > 3 \cdot 2^{x+4} + 5^{x+3} + 2^{x+6}$.
- С3.** Решите неравенство:
а) $4^x + 3 \cdot 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 232$;
б) $9^x + 3^{2(x-1)} - 2 \cdot 27^{\frac{2}{3}(x-2)} < 264$.
- С4.** Решите неравенство: а) $\frac{15^x - 225}{x^2 + 8x + 12} \geq 0$; б) $\frac{14^x - 196}{x^2 + 5x - 6} \geq 0$.
- С5.** Решите неравенство:
а) $4 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^{-x} \leq 33$; б) $8 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} \leq 17$.
- С6.** Решите неравенство:
а) $9 \cdot 5^x - 15^x + 5 \cdot 3^x > 45$; б) $8 \cdot 7^x - 14^x + 2^x > 8$.

C7. Решите неравенство:

а) $x^2 \cdot 4^x + 16 < 4x^2 + 4^{x+1}$;

б) $x^2 \cdot 3^x + 27 < 3x^2 + 3^{x+2}$.

C8. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} 2^x + 7 \cdot 2^{1-x} \leq 9, \\ \frac{x^2 + 4x - 8}{x^2 - 16} \leq \frac{x+5}{x+4} + \frac{1}{x-2}; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2^x + 9 \cdot 2^{1-x} \leq 11, \\ \frac{x^2 + 5x - 10}{x^2 - 25} \leq \frac{x+6}{x+5} + \frac{2}{x-3}. \end{cases}$$

C9. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} 2^{2x+1} - 11 \cdot 2^{x+1} + 36 \leq 0, \\ \frac{x^2 - 3x - 2}{x-3} - \frac{x^3 - 5x^2 - 4}{x-5} \leq x - x^2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^{x+1} + 28 \leq 0, \\ \frac{x^2 - 2x - 1}{x-2} - \frac{x^3 - 4x^2 - 3}{x-4} \leq x - x^2. \end{cases}$$

C10. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^x + 10 \leq 0, \\ \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{x^2 - 3x} \leq x + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x}; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 4^x - 19 \cdot 2^x + 34 \leq 0, \\ \frac{x^3 - 6x^2 + 6x - 6}{x^2 - 6x} \leq x + \frac{3}{x-4} + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

5.6. Логарифмические неравенства и системы, содержащие логарифмические неравенства

Уровень А

A1. Решите неравенство: а) $\log_5 x < 2$;

б) $\log_4 x < 3$.

A2. Решите неравенство: а) $\log_3 x \leq 3$;

б) $\log_2 x \leq 5$.

A3. Решите неравенство: а) $\log_4 x \geq -0,5$;

б) $\log_{25} x \geq -0,5$.

A4. Решите неравенство: а) $\log_{0,123} x \leq 0$;

б) $\log_{0,321} x \leq 0$.

A5. Решите неравенство: а) $\log_{\frac{1}{7}} x > 2$;

б) $\log_{\frac{1}{8}} x > 2$.

A6. Решите неравенство: а) $\log_{0,04} x \geq -1$;

б) $\log_{0,02} x \geq -1$.

A7. Решите неравенство:

а) $\log_5(4x + 5) < 3$;

б) $\log_3(2x - 5) < 4$.

A8. Решите неравенство:

а) $\log_{0,1}(3x + 25) < -2$;

б) $\log_{0,2}(6x - 25) < -3$.

A9. Решите неравенство:

а) $\log_{\frac{2}{7}}(2x - 2,5) \leq -1$;

б) $\log_{\frac{5}{6}}(5x - 2,8) \leq -1$.

A10. Решите неравенство:

а) $\log_3(10x - 19) > 4$;

б) $\log_4(7x - 24) > 4$.

Уровень В

B1. Решите неравенство:

а) $\log_5(x^2 - 4x) > 1$;

б) $\log_6(x^2 - 5x) > 1$.

B2. Решите неравенство:

а) $\log_3(x^2 - 8x) < 2$;

б) $\log_2(x^2 - 3x) < 2$.

B3. Решите неравенство:

а) $\log_{0,5}(24 - 2x - x^2) > -4$;

б) $\log_{0,25}(21 + 4x - x^2) > -2$.

B4. Решите неравенство:

а) $\ln(2x + 17) \geq \ln(4x - 13)$;

б) $\ln(3x + 19) \geq \ln(5x - 17)$.

B5. Решите неравенство:

а) $\lg(25x^2 - 4) \leq \lg(25 - 4x^2)$;

б) $\ln(16x^2 - 9) \leq \ln(16 - 9x^2)$.

B6. Решите неравенство:

а) $\log_{0,7}(2x^2 - 7x + 5) \geq \log_{0,7}(x^2 - 5)$;

б) $\log_{0,3}(2x^2 - 9x + 7) \geq \log_{0,3}(x^2 - 7)$.

B7. Решите неравенство:

а) $\log_{\sin 1}(x^2 - 2x - 11) \leq \log_{\sin 1}(7x - x^2 - 6)$;

б) $\log_{\cos 1}(x^2 + 2x - 17) \leq \log_{\cos 1}(8 + 7x - x^2)$.

B8. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} \log_{0,5}(x - 2) \geq -2, \\ \log_{0,5}(x^2 - 9x + 20) \leq -1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_{0,25}(x - 3) \geq -1, \\ \log_{0,5}(x^2 - 11x + 30) \leq -1. \end{cases}$$

B9. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} \log_2(3x^2 - 14x + 16) \leq 4, \\ \lg(2x^2 - 5x + 3) \leq \lg(x^2 - 3); \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_3(2x^2 - 15x + 27) \leq 3, \\ \ln(2x^2 - 9x + 10) \leq \ln(x^2 - 10). \end{cases}$$

B10. а) Водолазный колокол, содержащий $\nu = 3$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1,9$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$,

где $\alpha = 17,1 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300 \text{ К}$ — температу-

ра воздуха. Найдите, при каком наибольшем давлении p_2 (в атмосферах) совершённая воздухом работа не будет превосходить 30780 Дж.

б) Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моль воздуха при давлении $p_1 = 2,4$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$,

где $\alpha = 13,5 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300 \text{ К}$ — температу-

ра воздуха. Найдите, при каком наибольшем давлении p_2 (в атмосферах) совершённая воздухом работа не будет превосходить 16200 Дж.

Уровень С

C1. Решите неравенство:

а) $\log_2 x + \log_2(x + 6) \leq 4$;

б) $\log_3 x + \log_3(x - 6) \leq 3$.

C2. Решите неравенство:

а) $\log_{2x}^2(4x^2) + \log_2(8x^2) \leq 9$;

б) $\log_{5x}^2(25x^2) + \log_5(25x^2) \leq 8$.

C3. Решите неравенство:

а) $\log_{27} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} \leq \frac{1}{3}$;

б) $\log_9 \frac{2x^2 + 15x + 22}{x + 4} \leq \frac{1}{2}$.

C4. Решите неравенство:

а) $\log_3(x + 2) + \log_3(8 - x) \leq 1 + \log_3(x + 4)$;

б) $\log_3(x + 3) + \log_3(7 - x) \leq 1 + \log_3(x + 5)$.

C5. Решите неравенство:

а) $1 - \frac{1}{\log_{x-4} 0,2} \leq \frac{2}{\log_{x+20} 25}$;

б) $1 - \frac{1}{\log_{x-1} 0,1} \leq \frac{2}{\log_{x+17} 100}$.

С6. Решите неравенство:

а) $\log_4\left(20 - \frac{9}{x}\right) + \log_{\frac{1}{4}}\left(5 - \frac{x}{4}\right) \geq 1;$

б) $\log_3\left(15 - \frac{4}{x}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(5 - \frac{x}{3}\right) \geq 1.$

С7. Решите неравенство:

а) $3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)};$

б) $7^{\log_5 x^2} + 6 \cdot |x|^{\log_5 49} \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{0,2}(3x+4)}.$

С8. Решите неравенство:

а) $\log_2(\log_2(7x^2 - 6x)) \leq 2;$

б) $\log_3(\log_3(4x^2 - 3x)) \leq 1.$

С9. Решите неравенство:

а) $\log_{3-x}(x+1) \cdot \log_{x+2}(4-x) \leq 0;$

б) $\log_{1-x}(x+3) \cdot \log_{x+4}(2-x) \leq 0.$

С10. Решите неравенство:

а) $\log_{5x+7}(\log_{7-x}(x+3)) \geq 0;$

б) $\log_{5x+12}(\log_{6-x}(x+4)) \geq 0.$

6.1. Арифметические задачи с практическим содержанием

Уровень А

- A1.** а) Летом килограмм слив стоит 60 р. Мама купила 3 кг 200 г слив. Сколько рублей сдачи она должна получить с 1000 р.?
б) Летом килограмм черешни стоит 80 р. Мама купила 1 кг 800 г черешни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 р.?
- A2.** а) В летнем детском саду на каждого ребёнка полагается 60 г сахара в день. В лагере 215 детей. Какое наименьшее количество килограммовых пачек сахара достаточно на неделю?
б) В летнем лагере на каждого участника полагается 60 г сахара в день. В лагере 124 человека. Сколько килограммовых пачек сахара понадобится на весь лагерь на 7 дней?
- A3.** а) Булочка стоит 8 р. 50 к. Какое наибольшее количество булочек можно купить на 50 р.?
б) Пакет сока стоит 32 р. Какое наибольшее количество пакетов сока можно купить на 200 р.?
- A4.** а) Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?
б) Теплоход рассчитан на 950 пассажиров и 110 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?
- A5.** а) В общежитии института в каждой комнате можно поселить четырёх человек. Какое наименьшее количество комнат необходимо для поселения 83 иногородних студентов?
б) Большой корабль не может подойти к берегу, поэтому пассажиров отвозят с корабля на шлюпке, вмещающей 8 пассажиров. Сколько раз шлюпка приставала к берегу, если на берег отвезли 30 пассажиров?

- А6.** а) Урок в начальной школе длится 35 мин. Все перемены, кроме третьей, длятся 10 мин, а третья перемена — 20 мин. Уроки начинаются в 8:30. Когда заканчивается пятый урок? В ответ запишите часы и минуты, разделив их точкой.
- б) Урок в школе длится 40 мин. Все перемены, кроме четвёртой, длятся 15 мин, а четвёртая перемена — 25 мин. Уроки начинаются в 9:00. Когда заканчивается шестой урок? В ответ запишите часы и минуты, разделив их точкой.
- А7.** а) Магазин открывается в 10 ч утра, а закрывается в 9 ч вечера. Обеденный перерыв длится с 14 до 15 ч. Сколько часов в день открыт магазин?
- б) Поезд Санкт-Петербург—Нижний Новгород отправляется в 17:30, а прибывает в 8:30 на следующее утро. Сколько часов поезд находится в пути?
- А8.** а) В доме, в котором живёт Маша, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже (включая первый) по четыре квартиры. Маша живёт в квартире № 130. В каком подъезде живёт Маша?
- б) В доме, где живёт Миша, один подъезд. На каждом этаже (включая первый) по четыре квартиры. Миша живёт в квартире № 35. На каком этаже живёт Миша?
- А9.** а) Счётчик электроэнергии 1 ноября показывал 32544 кВт · ч, а 1 декабря 32726 кВт · ч. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 3 р. 60 к?
- б) Счётчик электроэнергии 1 ноября показывал 12625 кВт · ч, а 1 декабря 12802 кВт · ч. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 3 р. 80 к.?
- А10.** а) В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 103 м³ воды, а 1 октября — 114 м³. Какую сумму должен заплатить Алексей за холодную воду за сентябрь, если цена 1 м³ холодной воды составляет 19 р. 20 к.? Ответ дайте в рублях.
- б) В квартире, где проживает Валерий, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 марта счётчик показывал расход 182 м³ воды, а 1 апреля — 192 м³. Какую сумму должен заплатить Валерий за холодную воду за март, если цена 1 м³ холодной воды составляет 23 р. 10 к.? Ответ дайте в рублях.

- A11.** а) В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три шоколадки (одна шоколадка в подарок). Шоколадка стоит 32 р. Какое наибольшее число шоколадок можно получить на 120 р.?
- б) Шоколадка стоит 31 р. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три шоколадки (одну шоколадку в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 170 р. в воскресенье?
- A12.** а) Для приготовления маринованных огурцов на 1 л воды требуется 12 г лимонной кислоты. Хозяйка готовит две трёхлитровые банки маринада. В магазине продаются пачки лимонной кислоты по 10 г. Какое наименьшее число пачек достаточно купить хозяйке для приготовления маринада?
- б) Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых пачек сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 8 кг яблок?
- A13.** а) В пачке бумаги 500 листов. За неделю в офисе расходуется 1200 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 8 недель?
- б) В пачке бумаги 500 листов. За неделю в офисе расходуется 1800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 4 недели?
- A14.** а) Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 0,5 г 3 раза в день в течение 14 дней. Упаковка содержит 8 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок требуется на весь курс лечения?
- б) Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 0,5 г 2 раза в день в течение 21 дня. Упаковка содержит 10 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок требуется на весь курс лечения?
- A15.** а) Для покраски потолка требуется 200 г краски на 1 м². Краска продаётся в банках по 2 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 64 м²?
- б) Для лакировки пола в рекреации размером 10×10 м понадобилось ровно 2 банки лака. Какое наименьшее число банок лака нужно купить для лакировки пола в зале размером 15×30 м?

- A16.** а) Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 18 м, 12 м и 1,4 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене 300 р. за м^2 . Сколько будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки?
- б) Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 20 м, 10 м и 1,2 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене 400 р. за м^2 . Сколько будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки?
- A17.** а) Аня купила проездной билет на месяц. За месяц она совершила 41 поездку. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 850 р., а разовая поездка — 24 р.?
- б) Даша купила проездной билет на месяц. За месяц она совершила 52 поездки. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 840 р., а разовая поездка — 18 р.?
- A18.** а) Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 л бензина 30 р. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 л. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?
- б) Таксист за месяц проехал 5500 км. Стоимость 1 л бензина 32 р. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 л. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?
- A19.** а) На счету Сашиного мобильного телефона было 130 р., а после разговора с Верой осталось 94 р. Сколько минут длился разговор с Верой, если 1 мин разговора стоит 1 р. 20 к.?
- б) На счету Машиного мобильного телефона было 66 р., а после разговора с Леной осталось 39 р. Сколько минут длился разговор с Леной, если 1 мин разговора стоит 2 р. 25 к.?
- A20.** а) Какое наименьшее число коробок потребуется, чтобы пересыпать 143 кг крупы в коробки вместимостью 3 кг, 5 кг и 9 кг? Пустого места в коробках не должно остаться.
- б) Какое наименьшее число коробок потребуется, чтобы пересыпать 133 кг крупы в коробки вместимостью 2 кг, 5 кг и 9 кг? Пустого места в коробках не должно остаться.

6.2. Задачи на оптимальный выбор

Уровень А

- A1.** а) Какое наименьшее число коробок потребуется, чтобы 95 кг крупы пересыпать в коробки вместимостью 1 кг, 4 кг и 12 кг? Пустого места в коробках не должно остаться.
б) Какое наименьшее число коробок потребуется, чтобы 107 кг крупы пересыпать в коробки вместимостью 2 кг, 3 кг и 9 кг? Пустого места в коробках не должно остаться.
- A2.** а) Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за разговор (1 мин)
«Повременный»	Нет	1,5 р.
«Комбинированный»	550 р. за 300 мин	0,9 р. (сверх 300 мин в месяц)
«Безлимитный»	750 р.	Нет

Абонент предполагает, что общая длительность разговоров составит 400 мин в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц, если общая длительность разговоров действительно будет равна 400 мин?

- б) Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за разговор (1 мин)
«Повременный»	Нет	2 р.
«Комбинированный»	290 р. за 350 мин	1,5 р. (сверх 350 мин в месяц)
«Безлимитный»	1150 р.	Нет

Абонент предполагает, что общая длительность разговоров составит 600 мин в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц если общая длительность разговоров действительно будет равна 600 мин?

А3. а) При строительстве дома фирма использует один из типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 т природного камня и 8 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 6 т щебня и 60 мешков цемента. Тонна камня стоит 1700 р., щебень стоит 770 р. за тонну, а мешок цемента стоит 240 р. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

б) При строительстве дома фирма использует один из типов фундамента: бетонный или пеноблочный. Для фундамента из пеноблоков необходимо 2 кубометра пеноблоков и 7 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 2 т щебня и 25 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2900 р., щебень стоит 900 р. за тонну, а мешок цемента стоит 280 р. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

А4. В трёх салонах сотовой связи один и тот же смартфон продаётся в кредит на разных условиях. Условия приведены в таблице.

а)

Салон	Стоимость смартфона (р.)	Первоначальный взнос (в % от стоимости)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа (р.)
Эпсилон	24100	15	6	3680
Дельта	24200	25	6	3280
Омикрон	25000	25	12	1620

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты). В ответе запишите стоимость этой покупки в рублях.

б)

Салон	Стоимость смартфона (р.)	Первоначальный взнос (в % от стоимости)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа (р.)
Эпсилон	19800	10	6	3200
Дельта	20200	10	12	1580
Омикрон	20800	20	6	2900

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты). В ответе запишите стоимость этой покупки в рублях.

A5. а) Расписание поездов Москва—Минск и стоимость билетов представлены в таблице.

Номер поезда	Время отправления	Время прибытия (на следующие сутки)	Стоимость билета (р.)
1	14:09	00:28	2294
2	14:19	00:02	2544
3	18:37	04:14	2294
4	19:24	06:10	2190
5	21:47	06:19	2242
6	21:53	07:25	2544
7	22:25	08:12	2242

Вадиму Алексеевичу нужно доехать из Москвы в Минск поездом. При этом ему необходимо приехать в Минск не позже 07:00, в пути провести не более 10 ч и потратить на билет не больше 2250 р.

В ответе укажите какой-нибудь один номер подходящего поезда.

б) Расписание поездов Москва—Рязань и стоимость билетов представлены в таблице.

Номер поезда	Время отправления	Время прибытия	Стоимость билета (р.)
1	14:08	17:10	357
2	14:18	17:21	714
3	14:28	17:28	357
4	15:20	17:41	536
5	15:27	18:25	666
6	15:35	18:31	714
7	16:10	19:32	357

Игору Викторовичу нужно доехать из Москвы в Рязань поездом. При этом ему необходимо приехать в Рязань не раньше 18:00, в пути провести не более 3 ч и потратить на билет не больше 700 р.

В ответе укажите какой-нибудь один номер подходящего поезда.

Уровень В

- В1.** а) Чтобы связать свитер, нужно 600 г синей пряжи. Можно купить синюю пряжу по цене 80 р. за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 70 р. за 100 г и окрасить её. Пакетик краски стоит 50 р. и рассчитан на окраску 300 г пряжи. Сколько рублей будет стоить наиболее дешёвая покупка?
- б) Чтобы связать свитер, нужно 900 г синей пряжи. Можно купить синюю пряжу по цене 70 р. за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 р. за 100 г и окрасить её. Пакетик краски стоит 50 р. и рассчитан на окраску 300 г пряжи. Сколько рублей будет стоить наиболее дешёвая покупка?
- В2.** а) Ане нужно купить три разные пиццы так, чтобы среди них была хотя бы одна с грибами, хотя бы одна вегетарианская и хотя бы одна мясная. Какие пиццы из приведённой таблицы должна выбрать Аня, если она рассчитывает потратить не более 1200 р.? В ответе укажите все возможные варианты.

Номер	Состав / название	Тип	Стоимость (р.)
1	«4 сыра»	Вегетарианская	380
2	Помидоры, сладкий перец	Вегетарианская	350
3	«Болоньезе»	Мясная	450
4	Куриное филе, ананас, сыр	Мясная	400
5	Оливки, грибы, помидоры	Вегетарианская	400
6	Куриное филе, грибы, сыр	Мясная	480

- б) Юре нужно купить три разные пиццы так, чтобы среди них была хотя бы одна с грибами, хотя бы одна вегетарианская и хотя бы одна мясная. Какие пиццы из приведённой таблицы должен выбрать Юра, если он рассчитывает потратить не более 900 р.? В ответе укажите все возможные варианты.

Номер	Состав / название	Тип	Стоимость (р.)
1	Ветчина, сыр	Мясная	330
2	Сыр, помидоры	Вегетарианская	300
3	«4 сыра»	Вегетарианская	260
4	Курица, грибы, помидоры	Мясная	360
5	Говядина, салями, грибы	Мясная	390
6	Шпинат, грибы, сыр, оливки	Вегетарианская	310

- В3.** а) Турист хочет посетить четыре музея Санкт-Петербурга: Эрмитаж, Русский музей, Петропавловскую крепость и Исаакиевский собор. Экскурсионные кассы предлагают маршруты с посещением одного или нескольких объектов. Сведения о стоимости билетов и составе маршрутов представлены в таблице.

Номер маршрута	Посещаемые объекты	Стоимость (р.)
1	Эрмитаж	250
2	Исаакиевский собор, Петропавловская крепость	750
3	Эрмитаж, Петропавловская крепость	750
4	Петропавловская крепость	550
5	Русский музей	300
6	Исаакиевский собор, Русский музей	550

Какие маршруты должен выбрать турист, чтобы посетить все четыре музея и затратить на все билеты наименьшую сумму? В ответе укажите все возможные варианты.

- б) Турист хочет посетить четыре музея Санкт-Петербурга: Эрмитаж, Русский музей, Петропавловскую крепость и Исаакиевский собор. Экскурсионные кассы предлагают маршруты с посещением одного или нескольких объектов. Сведения о стоимости билетов и составе маршрутов представлены в таблице.

Номер маршрута	Посещаемые объекты	Стоимость (р.)
1	Русский музей, Исаакиевский собор	1400
2	Петропавловская крепость	350
3	Исаакиевский собор	600
4	Эрмитаж, Исаакиевский собор	1550
5	Русский музей	400
6	Эрмитаж, Петропавловская крепость	1350

Какую сумму затратит турист, если выберет наиболее дешёвый вариант?

- В4.** а) Турист подбирает экскурсии. Сведения об экскурсиях представлены в таблице.

Номер экскурсии	Посещаемые объекты	Стоимость (р.)
1	Загородный дворец, крепость	200
2	Крепость	100
3	Парк, музей живописи	400
4	Загородный дворец	250
5	Музей живописи	150
6	Загородный дворец, парк	350

Пользуясь таблицей, выберите набор экскурсий так, чтобы турист посетил четыре объекта: крепость, загородный дворец, парк и музей живописи, а суммарная стоимость экскурсий не превышала 650 р. В ответе укажите все возможные варианты.

- б) Турист подбирает экскурсии. Сведения об экскурсиях представлены в таблице.

Номер экскурсии	Посещаемые объекты	Стоимость (р.)
1	Крепость, загородный дворец	350
2	Загородный дворец	100
3	Музей живописи	200
4	Парк	350
5	Парк, музей живописи	300
6	Парк, крепость	350

Пользуясь таблицей, выберите набор экскурсий так, чтобы турист посетил четыре объекта: крепость, загородный дворец, парк и музей живописи, а суммарная стоимость экскурсий не превышала 700 р. В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров экскурсий без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

- В5.** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе средней цены P (в рублях за штуку), показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Рейтинг R вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - kP$, где k — некоторый коэффициент. В таблице даны цены и показатели четырёх моделей мясорубок.

а)

Модель мясорубки	Цена мясорубки (р. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4700	2	4	0
Б	2300	1	2	0
В	5400	2	4	2
Г	3700	3	1	2

Определите значение k , при котором модели А и Г будут иметь одинаковый рейтинг.

б)

Модель мясорубки	Цена мясорубки (р. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3700	4	3	2
Б	5100	3	4	3
В	5200	4	3	4
Г	4800	4	1	4

Определите значение k , при котором модели Б и В будут иметь одинаковый рейтинг.

Уровень С

- С1.** а) У фермера есть два поля, каждое площадью 5 га. На каждом поле можно выращивать картофель, морковь и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 390 ц/га, а на втором — 420 ц/га. Урожайность моркови на первом поле составляет 360 ц/га, а на втором — 440 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 310 ц/га, а на втором — 480 ц/га. Фермер может продавать картофель по

цене 2500 р. за центнер, морковь по цене 3500 р. за центнер, а свёклу по цене 4000 р. за центнер. Какой наибольший доход (в миллионах рублей) может получить фермер?

б) У фермера есть два поля, каждое площадью 6 га. На каждом поле можно выращивать картофель, морковь и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 410 ц/га, а на втором — 430 ц/га. Урожайность моркови на первом поле составляет 370 ц/га, а на втором — 430 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 320 ц/га, а на втором — 460 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 3000 р. за центнер, морковь по цене 3500 р. за центнер, а свёклу по цене 4000 р. за центнер. Какой наибольший доход (в миллионах рублей) может получить фермер?

С2. а) Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 м^2 и номера люкс площадью 40 м^2 . Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 м^2 . Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 р. в сутки, а номер люкс — 5000 р. в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

б) Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 м^2 и номера люкс площадью 45 м^2 . Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 м^2 . Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 р. в сутки, а номер люкс — 4000 р. в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

С3. а) Зинаида является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 ч в неделю, то за эту неделю они производят $8t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 ч в неделю, то за эту неделю они производят $15t$ единиц товара. За каждый час работы (на

каждом из заводов) Зинаида платит рабочему 600 р. Зинаиде нужно каждую неделю производить 578 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

б) Иван является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 ч в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 ч в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Иван платит рабочему 400 р. Ивану нужно каждую неделю производить 225 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

С4. а) Администратор должен разместить в гостинице группу из 29 спортсменов, приехавших на соревнования по синхронному плаванию. В его распоряжении есть 5 одноместных номеров, 10 двухместных номеров и 5 трёхместных номеров. Администратор должен разместить спортсменов так, чтобы в занятых номерах не оставалось свободных мест.

1) Какое наименьшее число номеров он сможет задействовать при данных условиях?

2) Какое наименьшее число двухместных номеров он сможет задействовать при данных условиях?

3) Какую наибольшую суточную выручку может получить отель за проживание спортсменов, если стоимость трёхместного номера составляет 8000 р. в сутки, стоимость двухместного номера — 7000 р. в сутки, стоимость одноместного номера — 4000 р. в сутки?

б) Администратор должен разместить в гостинице группу из 19 спортсменов, приехавших на соревнования по художественной гимнастике. В его распоряжении есть 3 одноместных номера, 6 двухместных номеров и 3 трёхместных номера. Администратор должен разместить спортсменов так, чтобы в занятых номерах не оставалось свободных мест.

1) Какое наименьшее число номеров он сможет задействовать при данных условиях?

2) Какое наименьшее число двухместных номеров он сможет задействовать при данных условиях?

- 3) Какую наибольшую суточную выручку может получить отель за проживание спортсменов, если стоимость трёхместного номера составляет 7000 р. в сутки, стоимость двухместного номера — 5000 р. в сутки, стоимость одноместного номера — 3000 р. в сутки?
- С5.** а) В распоряжении прораба имеется бригада из 30 рабочих. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)? Сколько у. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?
- б) В распоряжении прораба имеется бригада из 21 человека. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)? Сколько у. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

6.3. Задачи на движение

Уровень А

- A1.** а) Из двух городов, расстояние между которыми равно 800 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 70 км/ч и 90 км/ч?
- б) Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 60 км/ч и 80 км/ч?
- A2.** а) Города A , B и C соединены прямолинейным шоссе, причём город B расположен между городами A и C . Из города A в сторону города C выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города B в сторону города C выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль дого-

нит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 25 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами А и В равно 125 км?

б) Города А, В и С соединены прямолинейным шоссе, причём город В расположен между городами А и С. Из города А в сторону города С выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города В в сторону города С выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 22 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами А и В равно 132 км?

А3. а) Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 15 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого автомобилиста равна 60 км/ч, скорость второго автомобилиста равна 80 км/ч. Сколько минут с момента старта пройдёт, прежде чем второй автомобилист будет опережать первого ровно на 1 круг?

б) Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 12 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 75 км/ч, скорость второго автомобиля равна 90 км/ч. Сколько минут с момента старта пройдёт, прежде чем первый автомобиль будет опережать второй ровно на 1 круг?

А4. а) Моторная лодка прошла 48 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 7 ч. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x км/ч. Какое уравнение соответствует данному условию?

1) $\frac{48}{x+2} + \frac{48}{x-2} = 7$; 2) $\frac{48}{x+2} + \frac{48}{x-2} = \frac{1}{7}$;

3) $\frac{x+2}{48} + \frac{x-2}{48} = 7$; 4) $\frac{x+2}{48} + \frac{x-2}{48} = \frac{1}{7}$.

б) Моторная лодка прошла 36 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 5 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x км/ч. Какое уравнение соответствует данному условию?

1) $\frac{36}{x+3} + \frac{36}{x-3} = \frac{1}{5}$; 2) $\frac{x+3}{36} + \frac{x-3}{36} = 5$;

3) $\frac{x+3}{36} + \frac{x-3}{36} = \frac{1}{5}$; 4) $\frac{36}{x+3} + \frac{36}{x-3} = 5$.

- A5.** а) Первую половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 84 км/ч, а вторую — со скоростью 56 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.
б) Первую половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 72 км/ч, а вторую — со скоростью 108 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.
- A6.** а) Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 56 км/ч, а вторую — со скоростью 84 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.
б) Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 72 км/ч, а вторую — со скоростью 108 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.
- A7.** а) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 30 с. Найдите длину поезда в метрах.
б) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 18 с. Найдите длину поезда в метрах.
- A8.** а) Баржа прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 2 ч меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость баржи в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.
б) Баржа прошла против течения 36 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 2 ч меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость баржи в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.
- A9.** а) Два пешехода отправляются из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 200 м?
б) Два пешехода отправляются из одного и того же места в одном направлении на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 2 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 м?

- A10.** а) Из городов A и B , расстояние между которыми равно 480 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля: из города A — со скоростью 55 км/ч, а из города B — со скоростью 65 км/ч. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.
- б) Из городов A и B , расстояние между которыми равно 405 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля: из города A — со скоростью 60 км/ч, а из города B — со скоростью 75 км/ч. На каком расстоянии от города B автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Уровень В

- B1.** а) Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,5 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,7 км/ч, а другой — со скоростью 3,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча?
- б) Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до лесной поляны, находящейся в 4 км от места отправления. Один идёт со скоростью 3,3 км/ч, а другой — со скоростью 5,5 км/ч. Дойдя до поляны, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча?
- B2.** а) Моторная лодка прошла против течения 8 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 30 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч.
- б) Моторная лодка прошла против течения 21 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч.
- B3.** а) Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 16 км/ч, движется по течению реки до пристани и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 2 ч, а в исходный пункт теплоход возвращается через 10 ч после отплытия из него.
- б) Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 12 км/ч, движется по течению реки до пристани и после сто-

- янки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 4 ч, а в исходный пункт теплоход возвращается через 16 ч после отплытия из него.
- В4.** а) Дорога между пунктами *A* и *B* состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 19 км. Пешеход прошёл путь из *A* в *B* за 5 ч. Время его движения на спуске составило 4 ч. С какой скоростью спускался пешеход, если поднимался он со скоростью, на 1 км/ч меньшей?
- б) Дорога между пунктами *A* и *B* состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 16 км. Пешеход прошёл путь из *A* в *B* за 6 ч. Время его движения на спуске составило 2 ч. С какой скоростью спускался пешеход, если поднимался он со скоростью, на 2 км/ч меньшей?
- В5.** а) Из пункта *A* в пункт *B*, отстоящий от пункта *A* на 27 км, отправился пешеход со скоростью 5 км/ч. Через 36 мин после этого навстречу ему из пункта *B* вышел другой пешеход со скоростью 3 км/ч. Найдите расстояние от пункта *B* до места их встречи.
- б) Из пункта *A* в пункт *B*, отстоящий от пункта *A* на 11 км, отправился пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 15 мин после этого навстречу ему из пункта *B* вышел другой пешеход со скоростью 6 км/ч. Найдите расстояние от пункта *B* до места их встречи.
- В6.** а) Из пункта *A* в пункт *B* по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Последнюю $\frac{1}{13}$ часть пути моторная лодка шла с выключенным мотором, и её скорость относительно берега была равна скорости течения. На той части пути, где моторная лодка шла с включённым мотором, её скорость была на 5 км/ч больше скорости байдарки. Найдите скорость байдарки в неподвижной воде, если в пункт *B* байдарка и моторная лодка прибыли одновременно.
- б) Из пункта *A* в пункт *B* по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Последнюю $\frac{1}{9}$ часть пути моторная лодка шла с выключенным мотором, и её скорость относительно берега была равна скорости течения. На той части пути, где моторная лодка шла с включённым мотором, её скорость была на

7 км/ч больше скорости байдарки. Найдите скорость байдарки в неподвижной воде, если в пункт *В* байдарка и моторная лодка прибыли одновременно.

- В7.** а) Велосипедист отправился с некоторой скоростью из города *А* в город *В*, расстояние между которыми равно 88 км. Возвращаясь из *В* в *А*, он ехал сначала с той же скоростью, но через 2 ч пути вынужден был сделать остановку на 10 мин. После этого он продолжил путь в *А*, увеличив скорость на 2 км/ч, и в результате затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из *А* в *В*. Найдите скорость велосипедиста на пути из *А* в *В*.
- б) Велосипедист отправился с некоторой скоростью из города *А* в город *В*, расстояние между которыми равно 32 км. Возвращаясь из *В* в *А*, он ехал сначала с той же скоростью, но через 1 ч пути вынужден был сделать остановку на 12 мин. После этого он продолжил путь в *А*, увеличив скорость на 4 км/ч, и в результате затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из *А* в *В*. Найдите скорость велосипедиста на пути из *А* в *В*.
- В8.** а) Расстояние между пристанями *А* и *В* равно 70 км. Отчалив от пристани *А* в 7:00 утра, теплоход прошёл с постоянной скоростью до пристани *В*. После четырёхчасовой стоянки у пристани *В* теплоход отправился в обратный путь и прибыл к пристани *А* в тот же день в 23:00. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.
- б) Расстояние между пристанями *А* и *В* равно 45 км. Отчалив от пристани *А* в 8:00 утра, теплоход прошёл с постоянной скоростью до пристани *В*. После трёхчасовой стоянки у пристани *В* теплоход отправился в обратный путь и прибыл к пристани *А* в тот же день в 19:00. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.
- В9.** а) Иван и Алексей договорились встретиться в городе *Н*. Они едут в город *Н*. разными дорогами. Иван звонит Алексею и узнаёт, что тот находится в 350 км от *Н*. и едет с постоянной скоростью 70 км/ч. Иван в момент звонка находится в 399 км от *Н*. и ещё должен по дороге сделать 15-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Иван, чтобы прибыть в *Н*. одновременно с Алексеем?
- б) Сергей и Владимир договорились встретиться в городе *М*. Они едут в город *М*. разными дорогами. Сергей звонит Вла-

димиру и узнаёт, что тот находится в 150 км от М. и едет с постоянной скоростью 50 км/ч. Сергей в момент звонка находится в 192 км от М. и ещё должен по дороге сделать 20-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Сергей, чтобы прибыть в М. одновременно с Владимиром?

- В10.** а) От лесоповала вниз по течению реки движется плот длиной 2 км. Плотовщик доплывает на моторной лодке от конца плота к его началу и обратно за 10 мин. Найдите собственную скорость лодки. Ответ дайте в километрах в час.
- б) От лесоповала вниз по течению реки движется плот. Плотовщик доплывает на моторной лодке от конца плота к его началу и обратно за 9 мин. Найдите длину плота, если собственная скорость лодки равна 16 км/ч. Ответ дайте в метрах.

Уровень С

- С1.** а) Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 2 ч раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 45 мин после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?
- б) Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 3 ч раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 48 мин после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?
- С2.** а) Из городов А и В навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода. Когда первый пешеход прошёл четверть пути от А до В, второму до середины пути оставалось пройти 3 км. Когда второй пешеход прошёл половину пути от В до А, первый пешеход находился на расстоянии 1 км от второго. Найдите расстояние между А и В, если известно, что первый пешеход шёл медленнее второго.
- б) Из городов А и В навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода. Когда первый пешеход прошёл четверть пути от А до В, второму до середины пути оставалось пройти 1,5 км. Когда второй пешеход прошёл половину пути от В до А, первый пешеход находился на расстоянии 2 км от второго. Найдите расстояние между А и В, если известно, что первый пешеход шёл медленнее второго.
- С3.** а) Из точки А круговой трассы, длина которой равна 16 км, выехал велосипедист, а через 15 мин в том же направлении

выехал мотоциклист. Через 5 мин после выезда мотоциклист поравнялся с велосипедистом, а ещё через 20 мин поравнялся с ним вторично. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в километрах в час.

б) Из точки A круговой трассы, длина которой равна 14 км, выехал велосипедист, а через 20 мин в том же направлении выехал мотоциклист. Через 6 мин после выезда мотоциклист поравнялся с велосипедистом, а ещё через 14 мин поравнялся с ним вторично. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в километрах в час.

С4. а) Пристани A и B расположены на реке. Катер проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 24 км/ч. Найдите скорость течения, если собственная скорость катера равна 25 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

б) Пристани A и B расположены на реке. Катер проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 19,8 км/ч. Найдите скорость течения, если собственная скорость катера равна 20 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

С5. а) Пристани A и B расположены на реке. Катер проходит от A до B за 4 часа, а обратно — за 3 ч. Сколько часов будет плыть от B до A плот?

б) Пристани A и B расположены на реке. Катер проходит от A до B за 6 ч, а обратно — за 5 ч. Сколько часов будет плыть от B до A плот?

С6. а) Два бегуна одновременно стартовали из одного и того же места в одном направлении. Спустя 1 ч, когда первому бегуну оставалось бежать 1 км до промежуточного финиша, ему сообщили, что второй бегун миновал промежуточный финиш 5 мин назад. Найдите скорость каждого бегуна, если известно, что скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго.

б) Два бегуна одновременно стартовали из одного и того же места в одном направлении. Спустя 1 ч, когда первому бегуну оставалось бежать 1,5 км до промежуточного финиша, ему сообщили, что второй бегун миновал промежуточный финиш 5 мин назад. Найдите скорость каждого бегуна, если известно, что скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго.

С7. а) Если велосипедист увеличит скорость на 5 км/ч, то выиграет во времени 12 мин при прохождении некоторого пути. Если же он уменьшит скорость на 8 км/ч, то потеряет 40 мин на том же пути. Найдите скорость велосипедиста и длину пути.

- б) Если велосипедист увеличит скорость на 9 км/ч, то выиграет во времени 27 мин при прохождении некоторого пути. Если же он уменьшит скорость на 5 км/ч, то потеряет 29 мин на том же пути. Найдите скорость велосипедиста и длину пути.
- С8.** а) Велосипедист движется по пути AB , состоящем из горизонтальных участков, спусков и подъёмов. На горизонтальном участке скорость велосипедиста равна 10 км/ч, на подъёме — 8 км/ч и на спуске — 16 км/ч. На дорогу из A в B велосипедист тратит 6 ч, а на обратный путь из B в A — 5 ч 30 мин. Известно, что общая протяжённость горизонтальных участков составляет 20 км. Найдите общую длину подъёмов и спусков на пути из A в B .
- б) Велосипедист движется по пути AB , состоящем из горизонтальных участков, спусков и подъёмов. На горизонтальном участке скорость велосипедиста равна 15 км/ч, на подъёме — 6 км/ч и на спуске — 18 км/ч. На дорогу из A в B велосипедист тратит 6 ч, а на обратный путь из B в A — 11 ч 20 мин. Известно, что общая протяжённость горизонтальных участков составляет 30 км. Найдите общую длину подъёмов и спусков на пути из A в B .
- С9.** а) Глаша спустилась по движущемуся эскалатору за 24 с. По неподвижному эскалатору с той же скоростью относительно него она спустится за 42 с. За сколько секунд она спустится, стоя на ступеньках движущегося эскалатора?
- б) Даша спустилась по движущемуся эскалатору за 28 с. По неподвижному эскалатору с той же скоростью относительно него она спустится за 44 с. За сколько секунд она спустится, стоя на ступеньках движущегося эскалатора?
- С10.** а) Паша сбегал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно него и насчитал 70 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?
- б) Саша сбегал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 40 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно него и насчитал 60 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

6.4. Задачи на производительность и работу

Уровень А

- A1.** а) Один мастер выполняет заказ за 3 ч, а другой — за 6 ч. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?
б) Один мастер выполняет заказ за 4 ч, а другой — за 12 ч. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?
- A2.** а) Первая труба наполняет резервуар за один час, а вторая — за два часа. За сколько минут наполнят этот же резервуар обе трубы?
б) Первая труба наполняет резервуар за два часа, а вторая — за три часа. За сколько минут наполнят этот же резервуар обе трубы?
- A3.** а) Первый мастер обрабатывает за час на 5 деталей меньше, чем второй. Сколько деталей в час обрабатывает первый мастер, если за 5 ч оба мастера обработали 175 деталей?
б) Первый мастер обрабатывает за час на 10 деталей меньше, чем второй. Сколько деталей в час обрабатывает второй мастер, если за 4 ч оба мастера обработали 200 деталей?
- A4.** а) Поросёнок съедает один килограмм капусты за 5 мин, а кролик — за 50 мин. Вместе они съели кочан капусты за 10 мин. Какова масса кочана капусты? Ответ дайте в килограммах.
б) Поросёнок съедает один килограмм капусты за 4 мин, а кролик — за 40 мин. Вместе они съели кочан капусты за 20 мин. Какова масса кочана капусты? Ответ дайте в килограммах.
- A5.** а) Мастер обрабатывает в час на 15 деталей больше, чем подмастерье. За два часа, работая вместе, они обработали 70 деталей. Сколько деталей обработал подмастерье?
б) Мастер обрабатывает в час на 12 деталей больше, чем подмастерье. За пять часов, работая вместе, они обработали 140 деталей. Сколько деталей обработал подмастерье?
- A6.** а) Первый насос откачивает в минуту на 5 л воды больше, чем второй. Сколько литров воды в минуту откачивает второй насос, если за 20 мин, работая вместе, оба насоса откачали 500 л воды?
б) Первый насос откачивает в минуту на 10 л воды больше, чем второй. Сколько литров воды в минуту откачивает первый насос, если за 15 мин, работая вместе, оба насоса откачали 750 л воды?

- A7.** а) Два одинаковых трактора, работая вместе, вспахивают три одинаковых поля за 45 мин. За сколько минут вспахивает такое поле один трактор?
 б) Три одинаковых трактора, работая вместе, вспахивают четыре одинаковых поля за 40 мин. За сколько минут вспахивает такое поле один трактор?
- A8.** а) Шесть одинаковых комбайнов, работая вместе, убирают пять одинаковых полей за 50 мин. За сколько часов два таких комбайна убирают три таких поля?
 б) Четыре одинаковых комбайна, работая вместе, убирают пять одинаковых полей за один час. За сколько минут три таких комбайна убирают два таких поля?
- A9.** а) Первая труба наполняет бак объёмом 550 л, а вторая труба — бак объёмом 660 л. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 11 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?
 б) Первая труба наполняет бак объёмом 770 л, а вторая труба — бак объёмом 830 л. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 6 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?
- A10.** а) Первая труба пропускает на 10 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Ёмкость объёмом 3000 л вторая труба заполняет на 10 мин быстрее, чем первая труба. Пусть вторая труба пропускает x л воды в минуту. Какое уравнение соответствует условию задачи?

$$1) \frac{3000}{x} = \frac{3000}{x+10} - 10; \quad 2) \frac{3000}{x} = \frac{3000}{x+10} + 10;$$

$$3) \frac{3000}{x} = \frac{3000}{x-10} + 10; \quad 4) \frac{3000}{x} = \frac{3000}{x-10} - 10.$$

- б) Первая труба пропускает на 20 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Ёмкость объёмом 2400 л вторая труба заполняет на 20 мин быстрее, чем первая труба. Пусть вторая труба пропускает x л воды в минуту. Какое уравнение соответствует условию задачи?

$$1) \frac{2400}{x} = \frac{2400}{x-20} - 20; \quad 2) \frac{2400}{x} = \frac{2400}{x-20} + 20;$$

$$3) \frac{2400}{x} = \frac{2400}{x+20} + 20; \quad 4) \frac{2400}{x} = \frac{2400}{x+20} - 20.$$

Уровень В

- В1.** а) Витя отвечает за час на 15 вопросов теста, а Андрей — на 16. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Витя закончил позже Андрея на 12 мин. Сколько вопросов содержит тест?
б) Петя отвечает за час на 6 вопросов теста, а Ваня — на 7. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил позже Вани на 20 мин. Сколько вопросов содержит тест?
- В2.** а) Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации выполняет заказ за 20 ч. Через 4 ч после того, как первый приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?
б) Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации выполняет заказ за 12 ч. Через 2 ч после того, как первый приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?
- В3.** а) Из бассейна с помощью насоса откачали 40 м^3 воды, а затем вновь заполнили бассейн до прежнего уровня. На всё это потребовалось 13 ч. Известно, что при заполнении бассейна насос перекачивает в час на 3 м^3 воды меньше, чем при откачивании. Сколько часов ушло на заполнение бассейна?
б) Из бассейна с помощью насоса откачали 30 м^3 воды, а затем вновь заполнили бассейн до прежнего уровня. На всё это потребовалось 8 ч. Известно, что при заполнении бассейна насос перекачивает в час на 4 м^3 воды меньше, чем при откачивании. Сколько часов ушло на заполнение бассейна?
- В4.** а) Первый насос наполняет бак за 15 мин, второй — за 40 мин, а третий — за 2 ч. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?
б) Первый насос наполняет бак за 30 мин, второй — за 1 ч 20 мин, а третий — за 4 ч. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?
- В5.** а) Первый и второй насосы, работая вместе, наполняют бассейн за 3 ч. Второй и третий насосы, работая вместе, наполняют этот же бассейн за 6 ч, а первый и третий насосы — за 4 ч. За какое время наполнят бассейн три насоса, работая одновременно? Ответ дайте в минутах.

- б) Первый и второй насосы, работая вместе, наполняют бассейн за 6 ч. Второй и третий насосы, работая вместе, наполняют этот же бассейн за 12 ч, а первый и третий насосы — за 8 ч. За какое время наполнят бассейн три насоса, работая одновременно? Ответ дайте в минутах.
- В6.** а) Первая труба наполняет резервуар на 11 мин дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за полчаса. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?
б) Первая труба наполняет резервуар на 22 мин дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за один час. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?
- В7.** а) Писатель хочет набрать на компьютере рукопись объёмом 480 страниц. Если он будет набирать на 8 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать писатель?
б) Писатель хочет набрать на компьютере рукопись объёмом 450 страниц. Если он будет набирать на 5 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 3 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать писатель?
- В8.** а) В помощь садовому насосу, перекачивающему 90 л воды за 4 мин, подключили второй насос, перекачивающий тот же объём воды за 7 мин. Сколько времени эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 990 л воды?
б) В помощь садовому насосу, перекачивающему 50 л воды за 2 мин, подключили второй насос, перекачивающий тот же объём воды за 3 мин. Сколько времени эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 250 л воды?
- В9.** а) Саша и Стас вскапывают грядку за 10 мин, а один Стас — за 15 мин. За сколько минут вскапывает грядку один Саша?
б) Даша и Вика пропалывают грядку за 12 мин, а одна Вика — за 20 мин. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?
- В10.** а) Сладёна съедает банку варенья за 10 мин, Зефирка — за 12 мин, а Мармеладка — за 15 мин. За сколько минут они съедят банку варенья втроём?
б) Сладёна съедает горшочек мёда за 6 мин, Зефирка — за 20 мин, а Мармеладка — за 30 мин. За сколько минут они съедят горшочек мёда втроём?

Уровень С

- С1.** а) Первая труба пропускает на 5 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 300 л она заполняет на 10 мин дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 200 л?
- б) Первая труба пропускает на 10 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 600 л она заполняет на 20 мин дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 300 л?
- С2.** а) Бригада, состоящая из одного рабочего 1-го разряда, четырёх рабочих 2-го разряда и пяти рабочих 3-го разряда, выполняет заказ за 4 дня. Бригада, состоящая из четырёх рабочих 1-го разряда и одного рабочего 2-го разряда, выполняет тот же заказ за 12 дней. За сколько дней выполнит этот же заказ бригада, состоящая из одного рабочего 1-го разряда, одного рабочего 2-го разряда и одного рабочего 3-го разряда?
- б) Бригада, состоящая из шести рабочих 1-го разряда, пяти рабочих 2-го разряда и четырёх рабочих 3-го разряда, выполняет заказ за 5 дней. Бригада, состоящая из одного рабочего 2-го разряда и двух рабочих 3-го разряда, выполняет тот же заказ за 20 дней. За сколько дней выполнит этот же заказ бригада, состоящая из одного рабочего 1-го разряда, одного рабочего 2-го разряда и одного рабочего 3-го разряда?
- С3.** а) Три бригады маляров работают на строительстве и выполняют одинаковую работу, но имеют различную производительность труда. Производительность всех трёх бригад, работающих вместе, в 1,2 раза выше производительности первой и второй бригад, работающих вместе. Некоторое задание для первой бригады вторая и третья бригады, работая совместно, могут выполнить на 3 ч 12 мин быстрее, чем его выполняет первая бригада. Это же задание вторая бригада выполняет на 3 ч быстрее по сравнению с первой бригадой. За какое время первая бригада выполнит это задание?
- б) Три бригады маляров работают на строительстве и выполняют одинаковую работу, но имеют различную производительность труда. Производительность всех трёх бригад, работающих вместе, в 1,25 раза выше производительности первой

и второй бригад, работающих вместе. Некоторое задание для первой бригады вторая и третья бригады, работая совместно, могут выполнить на 3 ч 30 мин быстрее, чем его выполняет первая бригада. Это же задание вторая бригада выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой бригадой. За какое время первая бригада выполнит это задание?

- С4.** а) Для вспашки трёх одинаковых полей выделено три трактора различной производительности — по одному на каждое поле. Первый трактор начал работу на 30 мин раньше второго, а третий — на 20 мин позже второго. Вспашка полей велась тракторами равномерно и без остановок. Через некоторое время после начала работы третьего трактора оказалось, что к этому моменту каждый из тракторов выполнил одинаковую часть запланированной работы. Через сколько минут после завершения работы второго трактора закончил работу первый, если третий выполнил всю работу на 12 мин раньше второго?
- б) Для уборки зерна на трёх одинаковых полях выделено три комбайна разной производительности — по одному на каждое поле. Первый комбайн начал работу на 45 мин раньше второго и на 1 ч 15 мин раньше третьего. Уборка полей велась комбайнами равномерно и без остановок. Через некоторое время после начала работы третьего комбайна оказалось, что к этому моменту каждый из комбайнов выполнил одинаковую часть запланированной работы. Через сколько минут после завершения работы третьего комбайна закончил работу второй, если первый выполнил всю работу на 24 мин позже второго?
- С5.** а) Игорь и Паша вместе покрасят забор за 3 ч. Паша и Володя вместе покрасят этот же забор за 6 ч, а Володя и Игорь — за 4 ч. За какое время мальчики втроём покрасят этот забор?
- б) Маша и Настя вместе вымоют окно за 20 мин. Настя и Лена вымоют это же окно за 15 мин, а Маша и Лена — за 12 мин. За какое время девочки втроём вымоют это окно?
- С6.** а) Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых летних домика. В первой бригаде было 7 рабочих, а во второй — 13 рабочих. Через 8 дней после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады, в результате чего оба домика были построены одновременно. Сколько дней потребовалось бригадам, чтобы закончить работу в новом составе?

б) Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых летних домика. В первой бригаде было 8 рабочих, а во второй — 14 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 10 рабочих из второй бригады, в результате чего оба домика были построены одновременно. Сколько дней потребовалось бригадам, чтобы закончить работу в новом составе?

С7. а) Два насоса разной производительности наполняют резервуары, объёмом 432 л каждый. Насосы были включены одновременно, и спустя некоторое время в двух резервуарах оказалось всего 432 л воды. Через 6 мин после этого первый насос заполнил свой резервуар, а второй насос закончил работу на 18 мин позже. Сколько литров воды в минуту перекачивает каждый насос? Какой объём воды накачал бы первый насос за то время, которое требуется обоим насосам для заполнения одного резервуара при совместной работе?

б) Два насоса разной производительности наполняют резервуары, объёмом 504 л каждый. Насосы были включены одновременно, и спустя некоторое время в двух резервуарах оказалось всего 504 л воды. Через 7 мин после этого первый насос заполнил свой резервуар, а второй насос закончил работу на 21 мин позже. Сколько литров воды в минуту перекачивает каждый насос? Какой объём воды накачал бы первый насос за то время, которое требуется обоим насосам для заполнения одного резервуара при совместной работе?

С8. а) Три трактора разной производительности вспахивают два поля разной площади. Третий трактор вспахивает второе поле на 5 ч быстрее, чем первый вспахивает первое поле, но на 2 ч медленнее, чем второй вспахивает первое поле. Первый и второй тракторы, работая совместно, вспахивают первое поле на 11 ч быстрее, чем третий вспахивает второе поле. За сколько часов третий трактор вспахивает второе поле?

б) Три трактора разной производительности вспахивают два поля разной площади. Третий трактор вспахивает второе поле на 4 ч быстрее, чем первый вспахивает первое поле, но на 3 ч медленнее, чем второй вспахивает первое поле. Первый и второй тракторы, работая совместно, вспахивают первое поле на 12 ч быстрее, чем третий вспахивает второе поле. За сколько часов третий трактор вспахивает второе поле?

- С9.** а) Трава на всём лугу растёт одинаково густо и быстро. 70 коров съедают всю траву за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. За сколько дней съедят всю траву 20 коров?
б) Трава на всём лугу растёт одинаково густо и быстро. 50 коров съедают всю траву за 36 дней, а 80 коров — за 20 дней. Стадо коров съело всю траву на лугу за 100 дней. Сколько коров было в стаде?
- С10.** а) Три мастера разной квалификации должны изготовить некоторое количество деталей. Один второй мастер мог бы выполнить работу на несколько часов быстрее, чем первый, а третий — на столько же часов быстрее, чем второй. Первый и второй мастера вместе выполнили бы работу за 216 ч, а первый и третий вместе — за 135 ч. Сколько часов потребуется одному первому мастеру, чтобы выполнить всю работу?
б) Три мастера разной квалификации должны изготовить некоторое количество деталей. Один второй мастер мог бы выполнить работу на несколько часов быстрее, чем первый, а третий — на столько же часов быстрее, чем второй. Первый и второй мастера вместе выполнили бы работу за 384 ч, а первый и третий вместе — за 240 ч. Сколько часов потребуется одному первому мастеру, чтобы выполнить всю работу?

6.5. Задачи на проценты, части, доли

Уровень А

- A1.** а) Найдите 12% от 2400 р. Ответ дайте в рублях.
б) Найдите 44% от 400 м. Ответ дайте в метрах.
- A2.** а) Набор из семи одинаковых по стоимости карандашей подорожал на 7%. На сколько процентов подорожал один такой карандаш?
б) Набор из девяти одинаковых по стоимости мелков подешевел на 27%. На сколько процентов подешевел один такой мелок?
- A3.** а) Шесть килограммов огурцов стоят столько же, сколько пять килограммов помидоров. На сколько процентов один килограмм помидоров дороже одного килограмма огурцов?
б) Семь килограммов огурцов стоят столько же, сколько четыре килограмма помидоров. На сколько процентов один килограмм помидоров дороже одного килограмма огурцов?
- A4.** а) Килограмм винограда дороже килограмма яблок на 25%. На сколько процентов килограмм яблок дешевле килограмма винограда?

- б) Килограмм груш дороже килограмма слив на 60%. На сколько процентов килограмм слив дешевле килограмма груш?
- A5.** а) Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?
б) Три рубашки дешевле куртки на 10%. На сколько процентов четыре рубашки дороже куртки?
- A6.** а) В сосуд, содержащий 5 л 12%-го водного раствора некоторого вещества, добавили 7 л воды. Сколько процентов составляет концентрация вещества в получившемся растворе?
б) В сосуд, содержащий 8 л 15%-го водного раствора некоторого вещества, добавили 4 л воды. Сколько процентов составляет концентрация вещества в получившемся растворе?
- A7.** а) Смешали некоторое количество 13%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 23%-го раствора этого же вещества. Определите концентрацию получившегося раствора. Ответ дайте в процентах.
б) Смешали некоторое количество 15%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 19%-го раствора этого же вещества. Определите концентрацию получившегося раствора. Ответ дайте в процентах.
- A8.** а) Пирожок в кулинарии стоит 12 р. При покупке более 30 пирожков продавец делает скидку 5% от стоимости всей покупки. Купили 40 пирожков. Сколько рублей заплатили за покупку?
б) Тетрадь стоит 4 р. Если покупатель приобретает более 100 тетрадей, то магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки. Представитель школы купил 400 тетрадей. Сколько рублей он заплатил за покупку?
- A9.** а) В июне завод выпустил 800 приборов. В августе производство снизилось на 15%, а в сентябре — ещё на 15%. Сколько приборов завод выпустил в сентябре?
б) В июне завод выпустил 500 приборов. В августе производство снизилось на 20%, а в сентябре — ещё на 20%. Сколько приборов завод выпустил в сентябре?
- A10.** а) В феврале товар стоил 70 000 р. В мае цену на товар подняли на 6%, а в августе снизили на 6%. Сколько рублей стоил товар после снижения цены в августе?
б) В феврале товар стоил 8000 р. В мае цену на товар подняли на 15%, а в августе снизили на 15%. Сколько рублей стоил товар после снижения цены в августе?

Уровень В

- В1.** а) Банковский вклад в мае увеличился на 30%, а в июне уменьшился на 30%, после чего на счету оказалось 27300 р. Сколько рублей составлял вклад на конец апреля?
б) Банковский вклад в мае увеличился на 20%, а в июне уменьшился на 20%, после чего на счету оказалось 86400 р. Сколько рублей составлял вклад на конец апреля?
- В2.** а) Брюки дороже рубашки на 20% и дешевле пиджака на 46%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?
б) Брюки дешевле кофты на 20% и дороже рубашки на 25%. На сколько процентов рубашка дешевле кофты?
- В3.** а) Килограмм груш дороже килограмма яблок на 15%. Килограмм яблок дороже килограмма слив на 20%. На сколько процентов килограмм груш дороже килограмма слив?
б) Килограмм груш дороже килограмма яблок на 10%. Килограмм яблок дороже килограмма слив на 20%. На сколько процентов килограмм груш дороже килограмма слив?
- В4.** а) Куртка дороже пиджака на четверть, а пиджак дороже брюк в 4 раза. На сколько процентов брюки дешевле куртки?
б) Рубашка дешевле пиджака в 3 раза, куртка дороже пиджака на треть. На сколько процентов куртка дороже рубашки?
- В5.** а) Четыре килограмма яблок стоят столько же, сколько три килограмма груш, а пять килограммов груш стоят столько же, сколько два килограмма черешни. На сколько процентов один килограмм яблок дешевле одного килограмма черешни?
б) Пять килограммов яблок стоят столько же, сколько четыре килограмма груш, а десять килограммов груш стоят столько же, сколько семь килограммов черешни. На сколько процентов один килограмм яблок дешевле одного килограмма черешни?
- В6.** а) Смешали 4 л 15%-го водного раствора некоторого вещества с 6 л 25%-го раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?
б) Смешали 4 л 18%-го водного раствора некоторого вещества с 6 л 8%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора.
- В7.** а) Имеется сплав массой 112 кг, состоящий из никеля, меди и марганца. Масса никеля составляет 40% массы меди и марганца, а масса меди составляет 60% массы никеля и марганца. Сколько килограммов марганца содержится в сплаве?

б) Имеется сплав массой 221 кг, состоящий из никеля, меди и марганца. Масса никеля составляет 30% массы меди и марганца, а масса меди составляет 70% массы никеля и марганца. Сколько килограммов марганца содержится в сплаве?

В8. а) Объёмы ежемесячной добычи газа на первом, втором и третьем месторождениях относятся как 3:8:13. Планируется уменьшить месячную добычу газа на первом месторождении на 13% и на втором тоже на 13%. На сколько процентов нужно увеличить ежемесячную добычу газа на третьем месторождении, чтобы суммарный объём добываемого за месяц газа не изменился?

б) Объёмы ежемесячной добычи газа на первом, втором и третьем месторождениях относятся как 7:6:14. Планируется уменьшить ежемесячную добычу газа на первом месторождении на 14% и на втором тоже на 14%. На сколько процентов нужно увеличить ежемесячную добычу газа на третьем месторождении, чтобы суммарный объём добываемого за месяц газа не изменился?

В9. а) Гоша ежедневно принимает душ в течение 10 мин. Если он купит экономичную душевую лейку, расход воды уменьшится на 30%, но время приёма душа увеличится на 2 мин. На сколько процентов меньше Гоша будет платить за воду, израсходованную на приём душа, в случае покупки экономичной душевой лейки?

б) Юля ежедневно принимает душ в течение 10 мин. Если она купит экономичную душевую лейку, расход воды уменьшится на 40%, но время приёма душа увеличится на 3 мин. На сколько процентов меньше Юля будет платить за воду, израсходованную на приём душа, в случае покупки экономичной душевой лейки?

В10. а) Из водных животных в заповеднике обитают бобры, ондатры и выдры. Всего в заповеднике обитает 1000 водных животных. Найдите число выдр в заповеднике, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) бобры составляют 37% водных животных заповедника;

2) ондатры составляют 47% водных животных заповедника;

3) выдры составляют 67% водных животных заповедника.

б) Из водных животных в заповеднике обитают бобры, ондатры и выдры. Всего в заповеднике обитает 1000 водных животных. Найдите число бобров в заповеднике, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно — ложно:

- 1) бобры составляют 69% водных животных заповедника;
- 2) ондатры составляют 49% водных животных заповедника;
- 3) выдры составляют 39% водных животных заповедника.

Уровень С

- C1.** а) Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 кг изюма?
б) Виноград содержит 94% влаги, а изюм — 4%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 100 кг изюма?
- C2.** а) Семья состоит из трёх человек: мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?
б) Семья состоит из трёх человек: мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 118%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 7%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?
- C3.** а) В среду акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в четверг подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?
б) В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?
- C4.** а) Смешав 60%-й и 40%-й растворы кислоты и добавив 3 кг чистой воды, получили 30%-й раствор кислоты. Если бы вместо 3 кг воды добавили 3 кг 80%-го раствора той же кислоты, то получили бы 60%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 60%-го раствора кислоты использовали для получения смеси?

б) Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора кислоты использовали для получения смеси?

- С5. а) Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.
б) Первый сплав содержит 20% меди, второй — 30% меди. Масса второго сплава меньше массы первого на 5 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 24% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.
- С6. а) Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?
б) Имеется два сплава. Первый сплав содержит 20% никеля, второй — 5% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 100 кг, содержащий 11% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?
- С7. а) Имеются два сосуда. В первом содержится 30 кг, а во втором — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?
б) Имеются два сосуда, в первом из которых содержится 5 кг раствора кислоты, а во втором — 10 кг раствора той же кислоты, но другой концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 40% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?
- С8. а) Банк предоставляет кредит сроком на 10 лет под 19% годовых на следующих условиях: ежегодно заёмщик возвращает банку 19% от непогашенной части кредита и $\frac{1}{10}$ суммы кредита. Так, в первый год заёмщик выплачивает $\frac{1}{10}$ суммы кредита и 19%

от всей суммы кредита, во второй год заёмщик выплачивает $\frac{1}{10}$ суммы кредита и 19% от $\frac{9}{10}$ суммы кредита и т. д. Во сколько раз сумма, которую выплатит банку заёмщик, больше суммы кредита, если заёмщик не воспользуется досрочным погашением кредита?

б) Банк предоставляет ипотечный кредит сроком на 20 лет под 12% годовых на следующих условиях: ежегодно заёмщик возвращает банку 12% от непогашенной части кредита и $\frac{1}{20}$ суммы кредита. Так, в первый год заёмщик выплачивает $\frac{1}{20}$ суммы кредита и 12% от всей суммы кредита, во второй год заёмщик выплачивает $\frac{1}{20}$ суммы кредита и 12% от $\frac{19}{20}$ суммы кредита и т. д. Во сколько раз сумма, которую выплатит банку заёмщик, больше суммы кредита, если заёмщик не воспользуется досрочным погашением кредита?

С9. а) 15 июля планируется взять кредит на сумму 900 000 р. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит при условии, что ежемесячные выплаты будут не более 180 000 р.?

б) 15 июля планируется взять кредит на сумму 1 000 000 р. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит при условии, что ежемесячные выплаты будут не более 100 000 р.?

С10. а) 1 июня 2013 г. Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 р. в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное

количество месяцев Всеволод Ярославович мог взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 р.?

б) 1 января 2015 г. Павел Витальевич взял в банке 1 млн р. в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич мог взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. р.?

6.6. Задачи на свойства целых чисел

Уровень А

- A1.** а) Можно ли 345 л молока разлить по двухлитровым, четырёхлитровым и восьмилитровым бидонам так, чтобы в бидонах не оставалось пустого места?
б) Можно ли 542 л бензина разлить по трёхлитровым, шестилитровым и девятилитровым канистрам так, чтобы в канистрах не оставалось пустого места?
- A2.** а) Найдите цену одной заколки, если Варя говорит, что за шесть таких заколок она заплатила 49 р. 92 к., Тоня говорит, что за пять таких заколок она заплатила 41 р. 55 к., Света говорит, что за четыре такие заколки она заплатила 33 р. 28 к., и известно, что две из трёх девочек ошибаются.
б) Найдите цену одного ластика, если Серёжа говорит, что за четыре таких ластика он заплатил 21 р. 16 к., Ваня говорит, что за шесть таких ластиков он заплатил 31 р. 68 к., Витя говорит, что за восемь таких ластиков он заплатил 42 р. 24 к., и известно, что один из мальчиков ошибается.
- A3.** а) Найдите периметр треугольника, если длины двух его сторон равны 1 см и 6 см, а длина третьей стороны равна целому числу сантиметров.
б) Найдите периметр треугольника, если длины двух его сторон равны 7 см и 1 см, а длина третьей стороны равна целому числу сантиметров.
- A4.** а) Число диагоналей выпуклого многоугольника в 5 раз больше числа его сторон. Сколько сторон у многоугольника?
б) Число сторон выпуклого многоугольника в 7 раз меньше числа его диагоналей. Сколько сторон у многоугольника?

- А5.** а) Перед днём рождения Иры Лена сказала, что Ире подарят не меньше 9 кукол, а Вера — что не больше 7. Сколько кукол подарили Ире, если и Лена, и Вера ошиблись?
б) Перед хоккейным матчем Витя сказал, что будет заброшено не менее 12 шайб, а Ваня — что не более 10. Сколько шайб было заброшено, если и Витя, и Ваня ошиблись?
- А6.** а) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Алмаз», если из следующих четырёх утверждений о результате матча хоккейных команд «Рубин» и «Алмаз» три истинны, а одно нет:
1) выиграл «Рубин»;
2) матч закончился вничью;
3) в матче было заброшено 9 шайб;
4) «Рубин» пропустил больше трёх шайб.
б) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Рубин», если из следующих четырёх утверждений о результате матча хоккейных команд «Рубин» и «Алмаз» три истинны, а одно нет:
1) выиграл «Алмаз»;
2) матч закончился вничью;
3) в матче было заброшено 11 шайб;
4) «Рубин» забросил больше четырёх шайб.
- А7.** а) Из 36 пассажиров одного из купейных вагонов поезда 17 — женщины, 11 — мужчины, 8 — дети. В этом вагоне 9 четырёхместных купе. Выберите утверждения, которые обязательно верны при указанных условиях:
1) в каждом купе вагона есть по крайней мере одна женщина;
2) хотя бы в одном из купе вагона нет ни одного ребёнка;
3) в каждом купе вагона есть по крайней мере одна женщина и один мужчина;
4) хотя бы в одном из купе вагона есть по крайней мере двое мужчин.
В ответе в порядке возрастания запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.
б) Из 36 пассажиров одного из купейных вагонов поезда 19 — женщины, 7 — мужчины, 10 — дети. В этом вагоне 9 четырёхместных купе. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях:

- 1) в каждом купе вагона есть по крайней мере один ребёнок;
 - 2) в каждом купе вагона есть по крайней мере одна женщина и один мужчина;
 - 3) в одном из купе вагона есть по крайней мере два ребёнка;
 - 4) в одном из купе вагона есть по крайней мере три женщины.
- В ответе в порядке возрастания запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

A8. а) В мини-гостинице 12 двухместных номеров и 3 трёхместных номера. В каждом из заселённых номеров нет свободных мест. Всего в гостинице проживает 31 человек. Выберите утверждения, которые обязательно верны при указанных условиях:

- 1) все трёхместные номера заселены;
- 2) ни один трёхместный номер не заселён;
- 3) все двухместные номера заселены;
- 4) не заселён ровно один двухместный номер.

В ответе в порядке возрастания запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) В мини-гостинице 10 двухместных номеров и 2 трёхместных номера. В каждом из заселённых номеров нет свободных мест. Всего в гостинице проживает 21 человек. Выберите утверждения, которые обязательно верны при указанных условиях:

- 1) все двухместные номера заселены;
- 2) заселены 9 двухместных номеров;
- 3) оба трёхместных номера заселены;
- 4) заселён ровно один трёхместный номер.

В ответе в порядке возрастания запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

A9. а) Из 24 учащихся 6 класса 14 — девочки, 10 — мальчики. На экскурсии было 18 человек из этого класса. Выберите утверждения, которые обязательно верны при указанных условиях:

- 1) на экскурсии были все девочки класса;
- 2) на экскурсии были все мальчики класса;
- 3) на экскурсии было не менее 8 девочек;
- 4) на экскурсии было не менее 4 мальчиков.

В ответе в порядке возрастания запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) Из 28 учащихся 5 класса 12 — девочки, 16 — мальчики. На экскурсии было 20 человек из этого класса. Выберите утверждения, которые обязательно верны при указанных условиях:

- 1) на экскурсии была хотя бы одна девочка;
- 2) на экскурсии были все девочки класса;
- 3) на экскурсии было по крайней мере 8 мальчиков;
- 4) на экскурсии мальчиков было больше, чем девочек.

В ответе в порядке возрастания запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

A10. а) Из 26 учащихся 8 класса 9 занимаются в секции баскетбола, 12 — в секции волейбола, 16 — в секции настольного тенниса. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях:

- 1) по крайней мере один из учащихся класса занимается и в секции баскетбола, и в секции волейбола;
- 2) по крайней мере один из учащихся класса занимается и в секции баскетбола, и в секции настольного тенниса;
- 3) по крайней мере один из учащихся класса занимается и в секции волейбола, и в секции настольного тенниса;
- 4) по крайней мере один из учащихся класса занимается в каждой из трёх секций.

В ответе в порядке возрастания запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) Из 32 учащихся 8 класса 10 занимаются в секции баскетбола, 14 — в секции волейбола, 19 — в секции настольного тенниса. Выберите утверждения, которые обязательно верны при указанных условиях:

- 1) хотя бы один из учащихся класса занимается в двух секциях;
- 2) каждый учащийся класса занимается хотя бы в одной секции;
- 3) не менее 9 учащихся класса занимаются по крайней мере в двух секциях;
- 4) хотя бы один из учащихся класса занимается в каждой из трёх секций.

В ответе в порядке возрастания запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Уровень В

- В1.** а) Найдите наименьшее трёхзначное число, сумма цифр которого равна 22.
б) Найдите наибольшее трёхзначное число, сумма цифр которого равна 23.
- В2.** а) Может ли разность данного трёхзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, что и данное, но в обратном порядке, быть равной 198?
б) Может ли разность данного трёхзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, что и данное, но в обратном порядке, быть равной 270?
- В3.** а) Из трёхзначного числа вычли сумму его цифр. Может ли разность оказаться равной 189?
б) Из трёхзначного числа вычли сумму его цифр. Может ли разность оказаться равной 180?
- В4.** а) Нина задумала четырёхзначное число, сумма цифр которого равна 14. Известно, что это число не изменится, если записать его теми же цифрами, но в обратном порядке, и что число, образованное первыми двумя его цифрами, на 27 больше числа, образованного двумя последними его цифрами. Какое число задумала Нина?
б) Лида задумала четырёхзначное число, сумма цифр которого равна 18. Известно, что это число не изменится, если записать его теми же цифрами, но в обратном порядке, и что число, образованное первыми двумя его цифрами, на 9 больше числа, образованного двумя последними его цифрами. Какое число задумала Лида?
- В5.** а) Виталий задумал двузначное число. Цифра десятков этого числа на 5 больше цифры единиц. Если разделить задуманное число на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 11. Найдите задуманное число.
б) Валентин задумал двузначное число. Цифра десятков этого числа на 1 больше цифры единиц. Если разделить задуманное число на произведение его цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найдите задуманное число.
- В6.** а) Маша задумала трёхзначное число. Сумма цифр этого числа равна 7, а сумма квадратов цифр равна 27. Если из задуманного числа вычесть 396, то получится число, записанное теми же цифрами, что и задуманное, но в обратном порядке. Какое число задумала Маша?

- б) Паша задумал трёхзначное число. Сумма цифр этого числа равна 8, а сумма квадратов цифр равна 24. Если из задуманного числа вычесть 198, то получится число, записанное теми же цифрами, что и задуманное, но в обратном порядке. Какое число задумал Паша?
- В7.** а) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Апельсинус», если из следующих шести утверждений о результате матча хоккейных команд «Каштангенс» и «Апельсинус» четыре истинны, а два нет:
- 1) выиграл «Каштангенс»;
 - 2) выиграл «Апельсинус»;
 - 3) матч закончился вничью;
 - 4) в матче было заброшено 14 шайб;
 - 5) «Каштангенс» забросил менее семи шайб;
 - 6) «Апельсинус» забросил менее девяти шайб.
- б) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Каштангенс», если из следующих шести утверждений о результате матча хоккейных команд «Апельсинус» и «Каштангенс» четыре истинны, а два нет:
- 1) выиграл «Каштангенс»;
 - 2) выиграл «Апельсинус»;
 - 3) матч закончился вничью;
 - 4) в матче было заброшено 12 шайб;
 - 5) «Каштангенс» забросил больше четырёх шайб;
 - 6) «Апельсинус» забросил больше шести шайб.
- В8.** а) В комнате находятся 17 человек. Может ли каждый из них быть знаком ровно с пятью другими?
- б) В комнате находятся 15 человек. Может ли каждый из них быть знаком ровно с семью другими?
- В9.** а) На шахматном турнире каждый из участников должен был сыграть ровно одну партию с каждым из прочих, но два участника выбыли из турнира, сыграв только по 4 партии. Поэтому число партий, сыгранных в турнире, оказалось равным 62. Сколько всего было участников турнира? Состоялась ли игра между выбывшими участниками?
- б) На шахматном турнире каждый из участников должен был сыграть ровно одну партию с каждым из прочих, но два участника выбыли из турнира, сыграв только по 3 партии.

Поэтому число партий, сыгранных в турнире, оказалось равным 110. Сколько всего было участников турнира? Состоялась ли игра между выбывшими участниками?

- B10.** а) На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 7, то число букв на странице увеличится на 476. На сколько уменьшится число букв на странице, если уменьшить число строк и число букв в строке на 4?
- б) На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 7, то число букв на странице увеличится на 455. На сколько уменьшится число букв на странице, если уменьшить число строк и число букв в строке на 5?

Уровень С

- C1.** а) Ваня написал натуральное число, десятичная запись которого состоит из 31 цифры. Витя нашёл сумму цифр этого числа. Затем он снова вычислил сумму цифр и поступал так до тех пор, пока не получилось число 1. Найдите остаток от деления на 9 числа, написанного Ваней.
- б) Ира написала натуральное число, десятичная запись которого состоит из 31 цифры. Зоя нашла сумму цифр этого числа. Затем она снова вычислила сумму цифр и поступала так до тех пор, пока не получилось число 2. Найдите остаток от деления на 3 числа, написанного Ирой.
- C2.** а) Квартал застроен четырёхэтажными и шестиэтажными домами, причём шестиэтажных домов меньше, чем четырёхэтажных. Если число шестиэтажных домов увеличить вдвое, то число всех домов окажется больше 60. Если увеличить вдвое число четырёхэтажных домов, то число всех домов окажется меньше 63. Найдите количество четырёхэтажных и шестиэтажных домов в квартале.
- б) Квартал застроен шестнадцатизэтажными и одиннадцатизэтажными домами, причём одиннадцатизэтажных домов меньше, чем шестнадцатизэтажных. Если число одиннадцатизэтажных домов увеличить вдвое, то число всех домов окажется больше 33. Если увеличить вдвое число шестнадцатизэтажных домов, то число всех домов окажется меньше 36. Найдите количество шестнадцатизэтажных и одиннадцатизэтажных домов в квартале.

- С3.** а) Если построить солдат по 15 человек в шеренге, то последняя шеренга окажется неполной. Если же построить их по 14 человек в шеренге, то все шеренги окажутся полными, но их число будет больше на 1. Если же построить тех же солдат в шеренги по 9 в каждой, то последняя шеренга опять будет неполной, а число шеренг увеличится ещё на 9. Сколько всего солдат?
- б) Если построить солдат по 11 человек в шеренге, то последняя шеренга окажется неполной. Если же построить их по 10 человек в шеренге, то все шеренги окажутся полными, но их число будет больше на 2. Если же построить тех же солдат в шеренги по 7 в каждой, то последняя шеренга опять будет неполной, а число шеренг увеличится ещё на 10. Сколько всего солдат?
- С4.** а) В некотором царстве было несколько (более двух) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. Затем всё новые и новые княжества из числа прежних и вновь образующихся объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.
- 1) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?
- 2) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после одного из делений общее число княжеств было равно 162?
- 3) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало равно в 38 раз больше первоначального?
- б) В некотором царстве было несколько (более двух) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. Затем всё новые и новые княжества из числа прежних и вновь образующихся объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.
- 1) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 108?

2) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 254, если известно, что сразу после одного из делений общее число княжеств было равно 204?

3) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 42 раза больше первоначального?

С5. а) На листе бумаги написаны в строчку 14 единиц.

1) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

2) Докажите, что, если единицы, стоящие на чётных местах, заменить четвёрками, всё равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

3) Докажите, что между любыми 14 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

б) На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц.

1) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

2) Докажите, что, если единицы, стоящие на чётных местах, заменить семёрками, всё равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

3) Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

С6. а) Рейтинг изделия оценивается семью экспертами, каждый из которых ставит целую оценку от 0 до 12. При подсчёте рейтинга используется одна из двух моделей. В модели *A* учитываются все оценки экспертов, рейтинг R_A считается как среднее арифметическое всех семи оценок. В модели *B* отбрасываются самая высокая и самая низкая оценки экспертов, рейтинг R_B считается как среднее арифметическое оставшихся пяти оценок.

1) Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{25}$?

2) Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{35}$?

3) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов $R_A - R_B$, если дополнительно известно, что среди оценок экспертов нет одинаковых.

б) Рейтинг изделия оценивается семью экспертами, каждый из которых ставит целую оценку от 0 до 10. При подсчёте рейтинга используется одна из двух моделей. В модели A учитываются все оценки экспертов, рейтинг R_A считается как среднее арифметическое всех семи оценок. В модели B отбрасываются самая высокая и самая низкая оценки экспертов, рейтинг R_B считается как среднее арифметическое оставшихся пяти оценок.

1) Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{30}$?

2) Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{35}$?

3) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов $R_A - R_B$, если дополнительно известно, что среди оценок экспертов нет одинаковых.

С7. а) Иван Валерьевич бреется не чаще одного раза в день и не реже одного раза в два дня. Если он бреется на следующий день после предыдущего бритья, аккумулятор его бритвы разряжается на 6%, а если через день — на 9%. В состоянии покоя аккумулятор не разряжается. 31 января Иван Валерьевич побрился и после этого полностью зарядил аккумулятор бритвы.

1) Мог ли через несколько дней после последней зарядки аккумулятора, произведённой 31 января, Иван Валерьевич увидеть, что аккумулятор разрядился ровно на 47% ?

2) Побрившись в очередной раз через несколько дней после последней зарядки аккумулятора, произведённой 31 января, Иван Валерьевич увидел, что заряд аккумулятора его бритвы составил 76%. Какого числа в феврале это было, если известно, что до этого по крайней мере в один из дней февраля Иван Валерьевич не брился?

б) Сергей Алексеевич бреется не чаще одного раза в день и не реже одного раза в два дня. Если он бреется на следующий день после предыдущего бритья, аккумулятор его бритвы разряжает-

ся на 8%, а если через день — на 12%. В состоянии покоя аккумулятор не разряжается. 31 марта Сергей Алексеевич побрился и после этого полностью зарядил аккумулятор бритвы.

1) Мог ли через несколько дней после последней зарядки аккумулятора, произведённой 31 марта, Сергей Алексеевич увидеть, что аккумулятор разрядился ровно на 46%?

2) Побрившись в очередной раз через несколько дней после последней зарядки аккумулятора, произведённой 31 марта, Сергей Алексеевич увидел, что заряд аккумулятора его бритвы составил 60%. Какого числа в апреле это было, если известно, что до этого по крайней мере в один из дней апреля Сергей Алексеевич не брился?

С8. а) Мастер шестого разряда выполнит заказ за целое число часов, а мастер пятого разряда — медленнее, но тоже за целое число часов. Сначала в течение двух часов над заказом работал мастер шестого разряда, затем в течение трёх часов — мастер пятого разряда. В результате заказ был выполнен ровно на 90%.

1) За сколько часов выполнит заказ мастер шестого разряда?

2) Сколько минут потребуется мастеру пятого разряда, чтобы довести работу над заказом до конца?

б) Мастер шестого разряда выполнит заказ за целое число часов, а мастер четвёртого разряда — медленнее, но тоже за целое число часов. Сначала в течение трёх часов над заказом работал мастер шестого разряда, затем в течение четырёх часов — мастер четвёртого разряда. В результате заказ был выполнен ровно на 90%.

1) За сколько часов выполнит заказ мастер четвёртого разряда?

2) Сколько минут потребуется мастеру шестого разряда, чтобы довести работу над заказом до конца?

С9. а) Учебный центр производит набор на программу профессиональной подготовки.

1) Записавшихся на программу в среду было ровно 60% от числа всех позвонивших в этот день. Могло ли число человек, позвонивших в центр в среду, быть равным 31?

2) Последний позвонивший в центр в четверг не записался на участие в программе, и записавшихся в четверг стало ровно 50% от числа всех позвонивших в этот день. Сколько человек записалось на участие в программе в четверг, если перед последним звонком записавшихся было ровно 60% от числа позвонивших?

3) Последний позвонивший в центр в пятницу не записался на участие в программе, и записавшихся в пятницу стало ровно 40% от числа всех позвонивших в этот день. Сколько человек позвонило в центр в пятницу, если известно, что перед последним звонком процент записавшихся был натуральным числом?

б) Учебный центр производит набор на программу профессиональной подготовки.

1) Записавшихся на программу в среду было ровно 40% от числа всех позвонивших в этот день. Могло ли число человек, позвонивших в центр в среду, быть равным 39?

2) Последний позвонивший в центр в четверг не записался на участие в программе, и записавшихся в четверг стало ровно 40% от числа всех позвонивших в этот день. Сколько человек записалось на участие в программе в четверг, если перед последним звонком записавшихся было ровно 50% от числа позвонивших?

3) Последний позвонивший в центр в пятницу не записался на участие в программе, и записавшихся в пятницу стало ровно 60% от числа всех позвонивших в этот день. Сколько человек позвонило в центр в пятницу, если известно, что перед последним звонком процент записавшихся был натуральным числом?

C10. а) Веня скачал на свой планшет игру. За прохождение каждого уровня этой игры игрок получает в зависимости от потраченного времени от одной до трёх звёзд (три звезды – за самое быстрое прохождение, одну — за самое медленное). Аккумулятор планшета разряжается ровно на 3% в случае, когда игрок получает 3 звезды, ровно на 6% — когда игрок получает 2 звезды, ровно на 9% — когда игрок получает 1 звезду.

1) Мог ли аккумулятор планшета Вени разрядиться за время игры ровно на 32%?

2) Сколько уровней прошёл Веня, если за время игры аккумулятор его планшета разрядился ровно на 33% и Веня получил 17 звёзд?

3) Какое наименьшее и какое наибольшее число очков мог за время игры получить Веня при условии 2), если три звезды приносят игроку от 6000 до 9000 очков включительно, две звезды — от 3000 до 5000 очков включительно, одна звезда — от 1000 до 2000 очков включительно?

б) Сеня скачал на свой планшет игру. За прохождение каждого уровня этой игры игрок получает в зависимости от потраченного времени от одной до трёх звёзд (три звезды — за самое быстрое прохождение, одну — за самое медленное). Аккумулятор планшета разряжается ровно на 4% в случае, когда игрок получает 3 звезды, ровно на 8% — когда игрок получает 2 звезды, ровно на 12% — когда игрок получает 1 звезду.

1) Мог ли аккумулятор планшета Сени разрядиться за время игры ровно на 34%?

2) Сколько уровней прошёл Сеня, если за время игры аккумулятор его планшета разрядился ровно на 52% и Сеня получил 19 звёзд?

3) Какое наименьшее и какое наибольшее число очков мог за время игры получить Сеня при условии 2), если три звезды приносят игроку от 9000 до 12000 очков включительно, две звезды — от 6000 до 8000 очков включительно, одна звезда — от 2000 до 3000 очков включительно?

Глава 7. Представление данных, статистика, вероятность

7.1. Представление данных

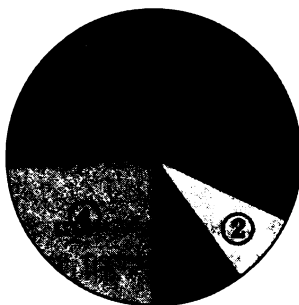
Уровень А

- А1.** По данным таблицы 1 определите, сколько процентов посетителей сайта было: а) из Омска; б) из Нижнего Новгорода.

**Таблица 1. Распределение посетителей сайта
по населённым пунктам 7 апреля 2017 г.**

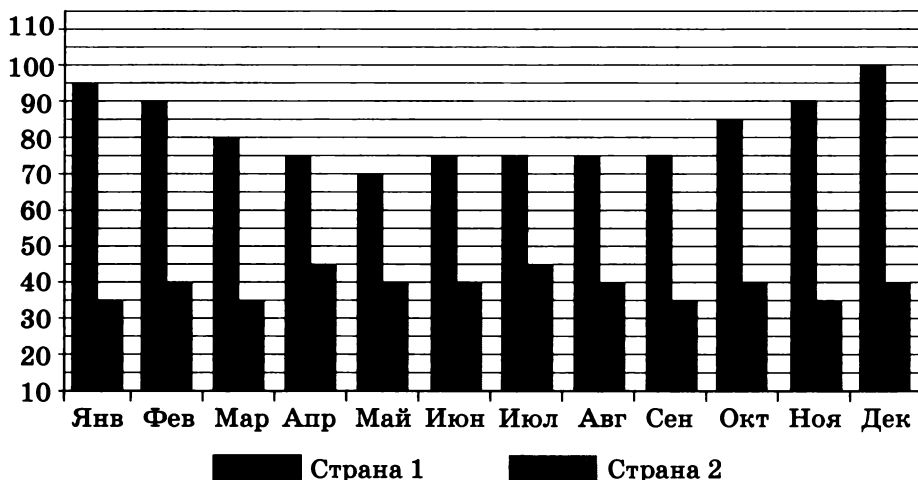
Населённый пункт	Число посетителей
Москва	320
Омск	130
Нижний Новгород	80
Тюмень	100
Санкт-Петербург	240
Другие населённые пункты	130

- А2.** По данным таблицы 1 построена диаграмма. Определите, какому городу на диаграмме соответствует:
а) сектор 2; б) сектор 4.



- А3.** *Потребление электроэнергии* измеряется в киловатт-часах ($\text{кВт} \cdot \text{ч}$). На диаграмме 1 показано потребление электроэнергии в двух странах в течение 2016 года в миллиардах $\text{кВт} \cdot \text{ч}$. Данные округлены до 5 млрд $\text{кВт} \cdot \text{ч}$.

Диаграмма 1. Потребление электроэнергии в двух странах



а) Определите, на сколько процентов меньше было потребление электроэнергии в стране 2 по сравнению со страной 1 в июле 2016 г.

б) Определите, на сколько процентов больше было потребление электроэнергии в стране 1 по сравнению со страной 2 в мае 2016 г.

A4. В таблице 2 на с. 148 показано, как рос Московский метрополитен с 2005 по 2017 г. В таблицу включены также станции и линии Московского центрального кольца (МЦК), которое было введено в строй в 2016 г. Используя данные, приведённые в таблице, ответьте на вопрос.

а) Сколько новых станций, включая МЦК, появилось за период с 2010 по 2017 г. включительно?

б) Сколько новых станций появилось за период с 2006 по 2011 г. включительно?

A5. а) Рассмотрите таблицу 2 на с. 148. Каждое число в столбце 6 получено как разность двух чисел из столбца 3: за текущий и за предыдущий год. Как бы вы озаглавили столбец 6?

б) Рассмотрите таблицу 2 на с. 148. Каждое число в столбце 7 получено как разность двух чисел из столбца 4: за текущий и за предыдущий год. Как бы вы озаглавили столбец 7?

Таблица 2. Данные о Московском метрополитене

Год	Перевезе- но пасса- жиров, млн чел.	Коли- чество станций на конец года	Общая протя- жённость линий на конец года, км	Средняя загруженность линий, млн пасс./км в год	?
2005	2603,2	179	294,2	8,85	
2006	2475,6	180	294,9	8,39	1
2007	2528,7	182	298,1	8,48	2
2008	2572,9	185	309,6		3
2009	2392,2	188	315,4	7,58	3
2010	2348,3	190	318,4	7,38	2
2011	2388,8	194	321,3	7,43	4
2012	2463,8	197	329,9	7,47	3
2013	2490,7	199	331,5		2
2014	2451,3	204	339,4	7,22	5
2015	2384,5	206	346,6	6,88	2
2016	2453,0	242	400,6	6,12	36
2017	2491,0	246	418,9		4

Уровень В

- В1.** По данным таблицы 3 определите общее число мест в детских садах России (в тысячах):
 а) в 1995 г.; б) в 2011 г.
 Результат округлите до целого числа тысяч.
- В2.** По данным таблицы 3 определите среднее число мест на один детский сад:
 а) в 1995 г.; б) в 2011 г.
 Результат округлите до сотых.

Таблица 3. Детские дошкольные образовательные организации

Годы	Число детских садов, тыс.	Численность воспитанников, тыс. чел.	Среднее число воспитанников на 100 мест в детских садах	Среднее число воспитанников в одном детском саду
1960	47,6	3037,7	113	63,82
1980	74,5	8149,1	109	109,38
1990	87,9	9009,5	108	102,50
1995	68,6	5583,6	83	81,39
2000	51,3	4263	81	83,10
2005	46,5	4530,4	95	
2006	46,2	4713,2	99	102,02
2007	45,7	4906,3	105	107,36
2008	45,6	5105,4	105	111,96
2009	45,3	5228,2	106	
2010	45,1	5388	107	119,47
2011	44,9	5661,1	106	126,08
2012	44,3	5982,9	105	135,05
2013	43,2	6347,3	105	146,93

- В3.** Рассмотрите диаграмму 1 на с. 147. Назовём *относительным годовым размахом потребления электроэнергии* величину

$$2 \cdot \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} \cdot 100\%,$$

где $E_{\min}$ и $E_{\max}$ — наименьшее и наибольшее месячное потребление соответственно. Определите относительный годовой размах потребления электроэнергии:

а) в стране 1;

б) в стране 2.

Результат округлите до десятой доли процента.

- В4.** Рассмотрите диаграмму 1 на с. 147. Выскажите и кратко обоснуйте предположение о географическом положении:

а) страны 1;

б) страны 2.

- В5.** Рассмотрите таблицу 2 на с. 148. В столбце 5 дана средняя загруженность линий Московского метрополитена (в млн пассажиров на 1 км линий в год). Часть данных отсутствует. Восстановите пропущенное значение:

а) для 2017 г.;

б) для 2013 г.

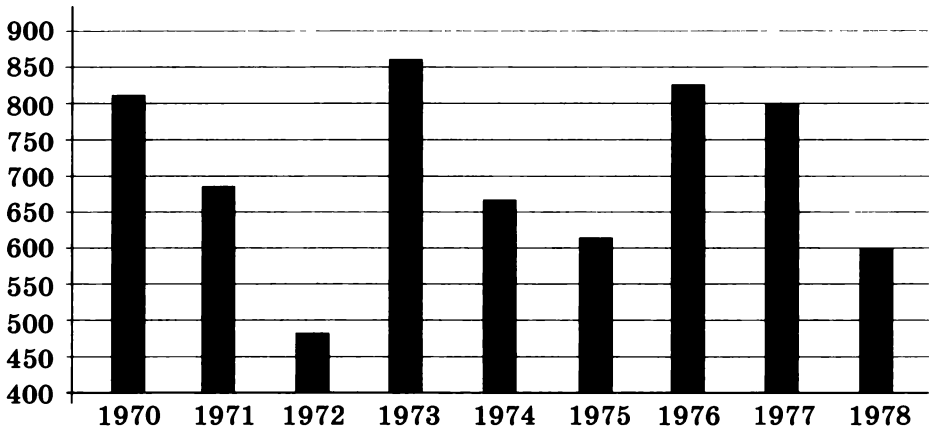
Результат округлите до сотых.

7.2. Описательная статистика

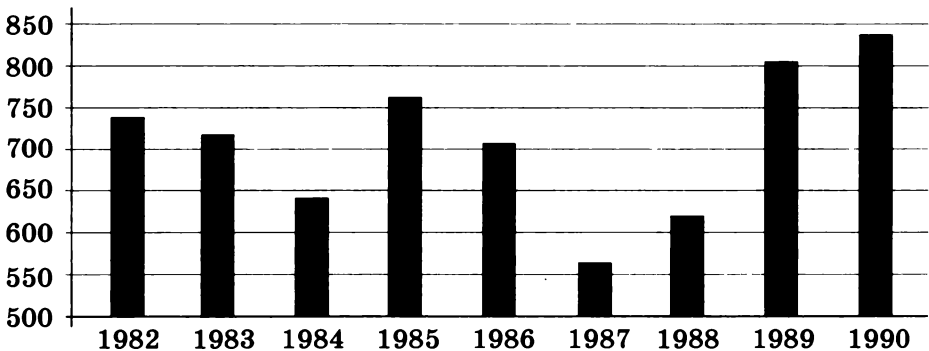
Уровень А

- А1.** Найдите медиану набора чисел:
а) 1, 2, 3, 2, 4, 1, 4, 3, 0; б) -3, -2, 0, 1, -4, 1, -2, 1, -3.
- А2.** Имеется набор чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$, медиана которого равна 2. Найдите медиану набора чисел:
а) $x_1^3, x_2^3, x_3^3, \dots, x_{100}^3$;
б) $2 - 3x_1, 2 - 3x_2, 2 - 3x_3, \dots, 2 - 3x_{100}$.
- А3.** Диаграммы 2 и 3 показывают годовое количество осадков в Москве в разные периоды. На горизонтальной оси отмечены годы, на вертикальной — годовое количество осадков (в миллиметрах).

**Диаграмма 2. Годовое количество осадков в Москве
с 1970 по 1978 г.**



**Диаграмма 3. Годовое количество осадков в Москве
с 1982 по 1990 г.**



- а) Найдите приближённо медиану количества осадков в Москве в период с 1970 по 1978 г. (в миллиметрах).
- б) Найдите приближённо медиану количества осадков в Москве в период с 1982 по 1990 г. (в миллиметрах).

A4. Рассмотрите диаграммы 2 и 3.

- а) Сколько было лет в период с 1970 по 1978 г., когда количество осадков отличалось от медианы менее чем на 50 мм?
- б) Сколько было лет в период с 1982 по 1990 г., когда количество осадков отличалось от медианы более чем на 30 мм?

A5. Рассмотрите диаграммы 2 и 3. Найдите приближённо размах величины «Годовое количество осадков в Москве» за период:

- а) 1970—1978 гг.;
- б) 1982—1990 гг.

Уровень В

- В1.** а) Рассмотрите диаграмму 2. Найдите медианного представителя — год из указанного периода, в который количество осадков в Москве было ближе всего к медиане данных.
б) Рассмотрите диаграмму 3. Найдите медианного представителя — год из указанного периода, в который количество осадков в Москве было ближе всего к медиане данных.
- В2.** Бегун во время тренировки несколько раз пробежал стометровую дистанцию. Тренер засёк время каждого забега. Получились следующие значения (в секундах): 10,52; 10,38; 11,02; 10,43; 10,32; 10,41; 11,14; 10,33. Укажите и найдите показатель, наиболее подходящий для описания:
а) среднего или типичного результата;
б) наилучшего результата.
- В3.** Найдите дисперсию набора из пяти чисел:
а) 122, 132, 132, 128, 126; б) -62, -58, -48, -46, -56.
Для упрощения вычислений удобно использовать свойства дисперсии.
- В4.** а) Дан набор числовых значений. Среднее арифметическое этого набора равно 15, а дисперсия равна 4. Каждое число этого набора умножили на 2. Найдите среднее арифметическое и дисперсию полученного набора чисел.
б) Дан набор числовых значений. Среднее арифметическое этого набора равно 18, а дисперсия равна 36. Каждое число этого набора разделили на 3. Найдите среднее арифметическое и дисперсию полученного набора чисел.
- В5.** В США и некоторых других странах температуру воздуха измеряют не в градусах Цельсия, а в градусах Фаренгейта (°F). Для перевода одной шкалы в другую используются формулы:

$$T_F = 1,8T_C + 32 \text{ и } T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32).$$

- а) По результатам ежедневных измерений оказалось, что средняя температура в июне в Чикаго равна 77 °F, а дисперсия температуры равна 24,3 кв. °F (градусов Фаренгейта в квадрате). Переведите эти величины в шкалу Цельсия.
- б) По результатам ежедневных измерений оказалось, что средняя температура в феврале в Пензе равна -12 °C, а дисперсия температуры равна 10 кв. °C (градусов Цельсия в квадрате). Переведите эти величины в шкалу Фаренгейта.

Уровень С

- С1.** а) В одной социальной сети шло голосование: какой из трёх котят на фото самый симпатичный. К утру Дымок получил 20% голосов, Васька — 35%, а Барсик — 45%. К вечеру голосов прибавилось, но все новые голоса были у Барсика. В результате у Дымка осталось только 16% голосов. Сколько процентов голосов стало вечером у Васьки?
- б) В одной социальной сети шло голосование: какая из трёх кукол, представленных на конкурсе юных мастеров, самая выразительная. К утру кукла Маша получила 20%, Глаша — 36%, а кукла Эсмеральда — 44%. К вечеру голосов прибавилось, но все новые голоса были у Эсмеральды. В результате у Глаши осталось только 27% голосов. Сколько процентов голосов вечером стало у Маши?
- С2.** В классе прошёл ежегодный тест по химии. В обеих группах средний балл понизился по сравнению с прошлым годом. Для отчёта учитель хочет, чтобы средний балл оказался выше прошлогоднего. Баллы менять нельзя, но учитель может задним числом перевести учеников из одной группы в другую. Можно ли сделать так, что средний балл в каждой группе окажется выше прошлогоднего? Если нет, объясните почему. Если можно, то покажите, как это сделать.
- а) Результаты теста даны в таблице 4.

Таблица 4. Результаты теста по химии

Группа А		Баллы
1	Антонов	31
2	Белоусова	46
3	Григорьев	52
4	Дёмин	51
5	Исаев	32
6	Калинина	41
7	Морских	59
8	Попов	32
9	Сидоров	44
10	Филипповская	54
Средний балл		44,2
Прошлый год		44,4

Группа Б		Баллы
1	Аверьянов	36
2	Воронова	49
3	Данилов	31
4	Злыднева	35
5	Ларионов	48
6	Мельникова	32
7	Озерова	35
8	Рассудова	47
9	Уварова	35
10	Яхонтов	40
Средний балл		38,8
Прошлый год		39,2

б) Результаты теста даны в таблице 5.

Таблица 5. Результаты теста по химии

Группа А		Баллы
1	Аладьева	51
2	Воронов	38
3	Гусев	34
4	Елина	43
5	Зорич	50
6	Касаткина	38
7	Моисеев	52
8	Облакова	38
9	Рысьев	35
10	Фофанов	39
Средний балл		41,8
Прошлый год		42,2

Группа Б		Баллы
1	Антропов	35
2	Белобородов	62
3	Глядешина	55
4	Долматов	57
5	Жарова	35
6	Ильин	54
7	Лопатин	47
8	Ноготкова	49
9	Суздальский	34
10	Филин	44
Средний балл		47,2
Прошлый год		47,5

- С3. а) Имеется некоторый набор числовых статистических данных: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Рассмотрим **функцию рассеивания** $f(a)$, которая равна среднему отклонению чисел x_k от числа a :

$$f(a) = \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \dots + |x_n - a|}{n}.$$

Докажите, что функция $f(a)$ принимает наименьшее значение при a , равном медиане набора $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

- б) Имеется некоторый набор числовых статистических данных: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Рассмотрим **функцию рассеивания** $f(a)$, которая равна среднему квадратичному отклонению чисел x_k от числа a :

$$f(a) = \sqrt{\frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2}{n}}.$$

Докажите, что функция $f(a)$ принимает наименьшее значение при a , равном среднему арифметическому набора $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

- С4.** а) На новогоднем празднике было много детей. Дед Мороз подарил им много конфет. Если какие-то двое видят, что у них конфет не поровну, но вместе чётное количество, то они делят их между собой поровну. Затем ещё какие-то двое могут также разделить свои конфеты поровну. И так далее. Может ли случиться так, что в какой-то момент у каждого ребёнка окажется столько же конфет, сколько было у него в самом начале?
- б) Однажды геометр начертил на доске многоугольник. Затем он стёр две соседние неравные стороны и заменил их двумя равными. Затем он то же самое проделал с другими соседними неравными сторонами и так далее — каждый раз заменял две неравные соседние стороны двумя равными по длине. Докажите, что, действуя таким образом, геометр никогда не сможет получить многоугольник, который подобен первоначальному.
- С5.** а) Село вытянуто вдоль прямой дороги. В селе всего n домов, которые стоят вдоль обочины, но на разном расстоянии от знака, обозначающего начало населённого пункта. Первый дом стоит на расстоянии x_1 м от знака, второй — на расстоянии x_2 м и т. д., последний, n -й дом стоит на расстоянии x_n м от этого знака. Было решено построить новое здание почты взамен обветшавшего старого, но тут почтальон заявил, что старое здание расположено неудобно, поскольку, обходя все n домов с газетами и письмами, он тратит слишком много времени. На каком расстоянии от знака, обозначающего начало населённого пункта, следует поставить новое здание почты, чтобы суммарное расстояние от него до всех домов оказалось наименьшим?
- б) Село вытянуто вдоль прямого шоссе. В селе всего n домов, которые стоят вдоль обочины, но на разном расстоянии от знака, обозначающего начало населённого пункта. Первый дом стоит на расстоянии x_1 м от знака, второй — на расстоянии x_2 м и т. д., последний, n -й дом стоит на расстоянии x_n м от этого знака. Было решено построить мачту с точкой доступа Wi-Fi, чтобы обеспечить всех жителей Интернетом. Когда выбирали место для мачты, инженер Петров заявил, что сила сигнала в доме обратно пропорциональна квадрату расстояния от этого дома до мачты. На каком расстоянии от знака, обозначающего начало населённого пункта, следует поставить мачту, чтобы сумма квадратов расстояний до всех домов оказалась наименьшей?

7.3. Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями

Уровень А

- A1.** а) На фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран, среди них группы из России, Англии и Франции. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Франции будет выступать после группы из Англии и после группы из России?
б) В очередь в случайном порядке встают трое: Аня, Оля и Юлия. Какова вероятность, что Аня окажется не последней?
- A2.** На соревнованиях по стрельбе из лука выступают 6 спортсменов из Финляндии, 3 спортсмена из Дании и 8 спортсменов из Швеции. Порядок стрельбы определяется жребием. Какова вероятность того, что:
а) вторым по счёту будет выступать спортсмен из Швеции;
б) последним будет выступать представитель Дании?
- A3.** а) На столе лежит 32 экзаменационных билета по теории вероятностей. Студент выучил ответы на все вопросы, кроме вопросов по теме «Комбинаторика». Известно, что вопросы по этой теме встречаются в 12 билетах. Студент случайным образом выбирает один билет. Какова вероятность того, что в этом билете нет вопросов по теме «Комбинаторика»?
б) В сборнике билетов по биологии всего 27 билетов, в 12 из них встречается вопрос по курсу ботаники. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном билете по биологии не окажется ни одного вопроса по ботанике.
- A4.** В чемпионате мира по футболу участвуют 32 команды. С помощью жребия их делят на 8 групп по 4 команды в каждой. Группы называют латинскими буквами от А до Н. Какова вероятность того, что:
а) команда Бразилии окажется в группе С;
б) команда Франции окажется в одной из групп: А, С, В или Н?
- A5.** Футбольная команда «Физик» по очереди проводит два товарищеских матча с командами «Химик» и «Математик». В начале каждого матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд первая будет владеть мячом. Какова вероятность того, что:
а) команда «Физик» выиграет жребий ровно один раз из двух;
б) команда «Математик» выиграет жребий хотя бы один раз?

Уровень В

- В1.** В компании сотовой связи клиенту дают новый телефонный номер. Четыре последние цифры номера — случайные от 0 до 9. Какова вероятность того, что:
- а) последние две цифры номера совпадут;
 - б) последние две цифры номера будут различаться на единицу?
- В2.** В банке клиенту выдают новую банковскую карту. Последние четыре цифры номера карты случайные. Какова вероятность события:
- а) последние четыре цифры — это цифры 0, 1, 2 и 3, идущие в каком-то произвольном порядке;
 - б) последние четыре цифры идут подряд по возрастанию (например, 0123 или 4567)?
- В3.** а) В новогодний хоровод, взявшись за руки, в случайном порядке встали 14 детей, среди них Оля и Серёжа. Найдите вероятность того, что они окажутся рядом.
- б) За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке садятся 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки не окажутся за столом рядом.
- В4.** а) В классе 26 человек, среди них два друга — Сергей и Павел. Класс случайным образом разбивают на две равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей окажется в той же группе, в которой оказался Павел.
- б) В группе 51 турист, и среди них только двое говорят по-испански. Для посещения музея группу разбивают случайным образом на три одинаковые по численности подгруппы. Какова вероятность того, что оба испаноязычных туриста окажутся в одной подгруппе?
- В5.** Среди экзаменационных вопросов есть только два, которые Сергей к экзамену не выучил. На экзамене Сергей вытягивает билет, в котором два вопроса. Какова вероятность того, что это окажутся как раз эти два невыученных вопроса, если:
- а) всего вопросов 12;
 - б) всего вопросов 20?

Уровень С

- С1.** Какова вероятность того, что среди трёх последних случайных цифр телефонного номера:
- а) не будет одинаковых цифр;
 - б) совпадут ровно две цифры?

- С2.** Какова вероятность того, что среди четырёх последних случайных цифр случайного телефонного номера:
- окажутся три одинаковые цифры;
 - никакие две соседние цифры не совпадут?
- С3.** В пакете 10 воздушных шариков, среди них 3 красных, остальные зелёные. Найдите вероятность того, что среди 7 случайно выбранных шариков:
- красных будет менее трёх;
 - окажется от 4 до 6 зелёных шариков.
- С4.** У бабушки было 6 красных, 6 зелёных и 8 синих чашек. За несколько лет внучка Маша разбила 7 случайных чашек. Какова вероятность того, что:
- из красных чашек осталось ровно 3 целых, а из зелёных — ровно 2;
 - Маша разбила ровно 3 синие чашки и ровно по 2 зелёных и красных?
- С5.** В билете лотереи «6 из 49» всего 49 номеров, и игрок должен выбрать 6 из них. Затем проводится тираж — разыгрываются случайные 6 номеров. Аналогично проводится лотерея «5 из 36». В какой из этих двух лотерей выше (и во сколько раз) шанс угадать:
- ровно три номера;
 - наибольшее возможное количество номеров?

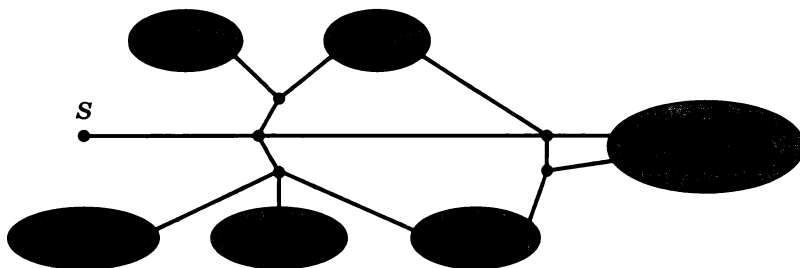
7.4. Операции над событиями. Дерево вероятностей.

Независимость событий

Уровень А

- А1.** а) Барометр измеряет атмосферное давление. Какое из следующих событий имеет наибольшую вероятность:
- $$A = \{\text{давление от 750 до 760 мм рт. ст.}\},$$
- $$B = \{\text{давление не меньше 735 мм рт. ст.}\},$$
- $$C = \{\text{давление больше 740 мм рт. ст.}\},$$
- $$D = \{\text{давление от 755 до 770 мм рт. ст.}\}?$$
- б) Анемометр измеряет скорость ветра. Какое из следующих событий имеет наибольшую вероятность:
- $$A = \{\text{скорость от 1 до 3 м/с}\},$$
- $$B = \{\text{скорость от 5 до 7 м/с}\},$$
- $$C = \{\text{скорость не превышает 15 м/с}\},$$
- $$D = \{\text{скорость от 3 до 10 м/с}\}?$$

- A2.** а) Вероятность того, что в городе К. солнечных дней в году будет 300 или больше, равна 0,36. Найдите вероятность того, что в следующем году в этом городе солнечных дней будет меньше чем 300.
 б) Вероятность того, что в случайный момент времени атмосферное давление в некотором городе ниже 745 мм рт. ст., равна 0,53. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени давление равно 745 мм рт. ст. или выше этого значения.
- A3.** а) В среднем из 120 сумок, поступивших в продажу, 3 сумки имеют какой-либо скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется без дефектов.
 б) В среднем из 150 пар обуви, поступивших в продажу, 3 пары имеют какой-либо скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная пара окажется без дефектов.
- A4.** В торговом центре два одинаковых автомата по продаже кофе. Вероятность того, что к концу дня в одном автомате закончится кофе, для каждого равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что кофе к концу дня:
 а) закончится в одном автомате, а в другом останется;
 б) останется в обоих автоматах.
- A5.** Сергей Петрович гуляет по своему посёлку. Схема дорожек показана на рисунке. Он начинает прогулку в точке S и на каждой развилке с равными шансами выбирает любую следующую дорожку (но не возвращается). Найдите вероятность того, что Сергей Петрович в конце концов:
 а) придёт к магазину;
 б) окажется около клуба.



Уровень В

- В1.** а) Термометр измеряет комнатную температуру. Вероятность того, что температура окажется не ниже 18°C , равна 0,78. Вероятность того, что температура не выше 23°C , равна 0,63. Найдите вероятность того, что температура окажется в пределах от 18°C до 23°C .
- б) В роддоме измеряют вес новорождённого. Вероятность того, что вес окажется не меньше 3 кг, равна 0,87; вероятность того, что вес окажется не больше 3 кг 600 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что вес случайно выбранного новорождённого окажется в пределах от 3 кг до 3 кг 600 г.
- В2.** Вероятность того, что одна любая новая батарейка бракованная, равна 0,05 (независимо от других батареек). Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две батарейки. Найдите вероятность того, что:
- а) обе батарейки окажутся исправными;
- б) хотя бы одна батарейка окажется исправной.
- В3.** В магазине стоят два банкомата, работающие независимо друг от друга. Каждый из них может оказаться неисправным с вероятностью 0,08 независимо от другого. Найдите вероятность того, что:
- а) оба банкомата исправны;
- б) хотя бы один из банкоматов исправен.
- В4.** Сергей Петрович гуляет по своему посёлку. Схема дорожек показана на рисунке к задаче А5. Он начинает прогулку в точке S и на каждой развилке с равными шансами выбирает любую следующую дорожку (но не возвращается). Найдите вероятность того, что:
- а) Сергей Петрович в конце концов придёт на школьный двор;
- б) Сергей Петрович в конце концов окажется на лугу.
- В5.** а) Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.
- б) Чтобы поступить на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 68 бал-

лов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Таможенное дело», нужно набрать не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент Р. получит не менее 68 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,7, по иностранному языку — 0,5 и по обществознанию — 0,6. Найдите вероятность того, что Р. сможет поступить хотя бы на одну из этих специальностей.

Уровень С

- С1.** Бросают одновременно четыре симметричные игральные кости. Найдите вероятность события:
- а) хотя бы на одной из костей выпало менее 4 очков;
 - б) среди выпавших очков есть числа 1, 2 и 3.
- С2.** а) В городе К. 55% взрослого населения — женщины, 60% из них работает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный при опросе населения житель города К. оказался либо мужчиной, либо неработающей женщиной.
- б) В городе К. 48% взрослого населения — мужчины, 75% из них работает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный при опросе населения житель города К. оказался либо женщиной, либо работающим мужчиной.
- С3.** Ваня бросает монету $n + 1$ раз, а Таня — n раз.
- а) Какое событие более вероятно: что у Вани и у Тани орлов выпадет поровну или что у Вани выпадет на одного орла больше, чем у Тани?
 - б) Какова вероятность того, что у Вани орлов выпадет больше, чем у Тани?
- С4.** Три игрока играют в такую игру: каждый бросает игральную кость. Игрок получает приз, если он выбросил число очков, которое не удалось выбросить никому больше.
- а) Какова вероятность того, что первый игрок получит приз?
 - б) Какова вероятность того, что хоть кто-то получит приз?
- С5.** а) Всем пациентам с подозрением на одну из тропических лихорадок делают анализ крови. Если анализ выявляет вирус лихорадки, то результат анализа положительный. У больных лихорадкой пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если лихорадки нет, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02.

Известно, что у пациентов с подозрением на лихорадку анализ оказывается положительным в 19,6% случаев. Найдите вероятность того, что пациент с подозрением на лихорадку действительно болен.

б) Автоматическая линия изготавливает зарядные устройства для телефонов. Известно, что 97% неисправных устройств обнаруживаются при контроле качества продукции и что система контроля ошибочно бракует 1% исправных устройств. Устройства, которые не забракованы, упаковываются и поступают в продажу. Известно также, что всего в продажу поступает 95% всех выпущенных устройств. Найдите вероятность того, что случайно выбранное сходящее с автоматической линии устройство неисправно. Результат округлите до тысячных.

7.5. Условная вероятность. Формула полной вероятности

Уровень А

- A1.** а) Правильную игральную кость бросают дважды. Сумма выпавших очков равна 8. Найдите вероятность события:
а) в первый раз выпало не больше чем 5 очков;
б) при первом броске выпало больше очков, чем при втором.
- A2.** Симметричную монету подбрасывают три раза. Найдите вероятность того, что выпало ровно два орла, если известно, что:
а) при втором броске выпал орёл;
б) не все три раза выпал орёл.
- A3.** В соревнованиях участвуют 18 гимнасток: 6 — из Швеции, 5 — из Норвегии, остальные — из России. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Первой выпало выступать спортсменке из России. Какова вероятность того, что:
а) третьей по порядку будет выступать гимнастка из Швеции;
б) последней тоже будет выступать гимнастка из России?
- A4.** а) Симметричную монету бросают дважды. Известно, что при одном из бросков выпал орёл. Какова вероятность того, что в другой раз тоже выпадет орёл?
б) В семье двое детей. Известно, что одна из них — девочка. Какова вероятность того, что другой ребёнок — мальчик? Считайте, что рождения мальчика и девочки равновозможны.

- A5.** а) В группе детского сада 25 человек, из них 11 — мальчики. Среди мальчиков 5 голубоглазых, а среди девочек 6 голубоглазых. Какова вероятность того, что случайно выбранный воспитанник из этой группы окажется голубоглазым?
- б) В 8 классе 30 учеников, из них 13 — девочки. Среди мальчиков только 2, а среди девочек только 4 имеют оценку «5» по математике. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик класса имеет оценку «5» по математике?

Уровень В

- B1.** Из класса, в котором 13 мальчиков и 15 девочек, случайным образом выбрали одного ученика. Оказалось, что это девочка. Какова вероятность того, что при этом условии следующий случайно выбранный ученик:
- а) тоже окажется девочкой;
- б) окажется мальчиком?
- B2.** а) На конференцию приехали делегации из городов А. и Б. В делегации города А. 60% — женщины, а в делегации города Б. женщин ровно половина. В первый день выбирают председателя. Для этого с помощью жребия сначала выбирают город, а потом — тоже с помощью жребия — одного представителя из делегации этого города. Какова вероятность того, что председателем будет избрана женщина?
- а) На конференцию приехали делегации из областей А. и Б. — сельские и городские жители. В делегации области А. 80% — горожане, а в делегации области Б. горожан ровно две трети. Чтобы выбрать председателя конференции, сначала с помощью жребия выбирают область, а потом — тоже с помощью жребия — одного представителя из делегации этой области. Какова вероятность того, что председателем будет избрана женщина — сельский житель?
- B3.** а) В левом кармане брюк у Сергея две монеты по 5 р. и одна монета 10 р., а в правом кармане — две монеты по 10 р. и одна монета 5 р. Когда Сергей вешал брюки в шкаф, из одного из карманов выпала монета достоинством 10 р. Какова вероятность того, что она выпала из левого кармана?
- б) В левом кармане брюк у Андрея лежит три монеты по 2 р. и одна монета 5 р., а в правом кармане — две монеты по 2 р. и три монеты по 5 р. Когда Андрей вешал брюки в шкаф, из одного из карманов выпали две монеты: 2 р. и 5 р. Какова вероятность того, что они выпали из правого кармана?

- В4.** а) Тест по истории сдали 80% учащихся школы, а тест по химии — 70% учащихся. При этом известно, что тест по химии сдали 77% тех, кто успешно сдал тест по истории. Найдите долю тех, кто сдал тест по истории, среди тех, кто сдал тест по химии.
- б) Тест по обществознанию сдали 90% учащихся школы, а тест по химии сдали 70% учащихся. При этом известно, что тест по химии сдали 63% тех, кто успешно сдал тест по обществознанию. Найдите долю тех, кто сдал тест по обществознанию, среди тех, кто сдал тест по химии.
- В5.** а) По результатам исследования известно, что новый телевизор некоторой модели в течение гарантийного срока ломается с вероятностью 0,1. Среди телевизоров, которые были в гарантийном ремонте, доля тех, которые не ломаются в течение следующих трёх лет после окончания гарантийного срока, равна 45%. Среди телевизоров, которые не ломались в течение гарантийного срока, доля тех, которые служат без поломки в течение трёх последующих лет, равна 75%. Какова вероятность того, что случайно выбранный телевизор этой модели после окончания гарантийного срока прослужит без ремонта дольше трёх лет?
- б) По результатам исследования известно, что новый холодильник некоторой модели в течение гарантийного срока ломается с вероятностью 0,08. Среди холодильников, которые побывали в гарантийном ремонте, доля тех, которые не ломаются в течение следующих пяти лет после окончания гарантийного срока, равна 55%. Среди холодильников, которые не ломались в течение гарантийного срока, доля тех, которые служат без поломки в течение пяти последующих лет, равна 80%. Какова вероятность того, что случайно выбранный холодильник этой модели после окончания гарантийного срока прослужит без ремонта дольше пяти лет?

Уровень С

- С1.** В левом кармане брюк у Сергея две монеты по 5 р. и одна монета 10 р., а в правом кармане — две монеты по 10 р. и одна монета 5 р. Когда Сергей вешал брюки в шкаф, из одного из карманов выпали две монеты и одна из них закатилась под шкаф. Какова вероятность того, что под шкаф закатилась десятирублёвая монета, если известно, что вторая выпавшая монета:
- а) десятирублёвая; б) пятирублёвая?

- С2.** Правильную игральную кость бросают несколько раз. Известно, что сумма всех выпавших очков оказалась равна 4. Найдите вероятность того, что было сделано:
- ровно три броска;
 - не более трёх бросков.
- С3.** а) (*Парадокс Монти-Холла.*) Ведущий игры предлагает участнику разыграть приз, который находится в одной из трёх одинаковых с виду коробок. Игрок должен выбрать коробку. Затем ведущий убирает одну из двух оставшихся коробок, но ту, в которой приза нет, и предлагает игроку одно из двух: либо оставить свой выбор без изменения, либо изменить его, указав на третью коробку. Укажите выигрышную стратегию игрока: менять выбор или нет. Найдите вероятность получения приза при этой стратегии.
- б) (*Парадокс заключённых.*) Трое заключённых, А., Б. и В., имеют равные шансы на помилование. Они подали прошения о помиловании и от знакомого надзирателя узнали, что помилованы двое из них, но надзиратель не сказал, кто именно. Тогда А. просит сказать ему по секрету хоть что-нибудь ещё. Надзиратель сказал, что про А. говорить не будет, но точно знает, что помилован В. Тут А. расстроился, поскольку прежде он считал, что вероятность его освобождения равна $\frac{2}{3}$, а когда он получил информацию о помиловании В., вероятность освобождения снизилась до $\frac{1}{2}$ — ведь теперь выбор между А. и С. Прав ли А. в своих рассуждениях? Чему теперь равна вероятность освобождения А.?
- С4.** У бизнесмена был советник, который на любой правильно поставленный вопрос давал ответ «да» или «нет». При этом советник давал верный совет с вероятностью p . Однажды бизнесмен нанял второго советника, который также давал верный совет с вероятностью p . Если советники давали разные ответы, то бизнесмен принимал решение сам, бросая монетку: орёл — да, решка — нет.
- Увеличилась ли вероятность верного решения по сравнению с тем временем, когда у бизнесмена был один советник? Если да, то насколько, если нет, почему?
 - Как изменится вероятность верного решения, если взять третьего советника и всегда следовать совету большинства? Если да, то насколько, если нет, почему?

- С5. а) Ровно половина населения острова Невезения — зайцы, а все остальные — кролики. Если житель острова Невезения что-нибудь утверждает, он всегда искренне верит в то, что говорит. При этом зайцы добросовестно заблуждаются в среднем в каждом четвёртом случае, а кролики добросовестно заблуждаются в среднем в каждом третьем случае. Однажды в центр острова вышел зверь и закричал: «Я не заяц!» Помолчал и грустно произнёс: «Я не кролик». Какова вероятность того, что он всё же заяц?
- б) Ровно треть населения города — липсики, остальные — лопсики. Они никогда не обманывают, но могут ошибаться. Липсики ошибаются в среднем в каждом третьем случае, а лопсики ошибаются в каждом четвёртом случае. Однажды к ратуше вышел один из жителей и закричал: «Я не липсик!» Затем он подумал и сказал: «Я не лопсик». Какова вероятность того, что он всё же липсик?

7.6. Независимые испытания

Указание. В задачах этого раздела при необходимости используйте для расчётов таблицу чисел C_n^k (треугольник Паскаля) и калькулятор или компьютер.

Треугольник Паскаля

										k										
n										0										
0											1									
1												2								
2													3							
3														4						
4															5					
5																6				
6																	7			
7																		8		
8																			9	
9																				10
10																				

Пример: $C_5^2 = 10$

Уровень А

- А1. Симметричную монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Найдите вероятность того, что потребуется сделать:
- а) ровно три броска; б) больше четырёх бросков.

- A2.** Игральную кость бросают до тех пор, пока на ней не выпадет 6 очков. Найдите вероятность того, что потребуется сделать:
- ровно три броска;
 - больше трёх бросков.
- A3.** Стрелок стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0,6$. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется:
- ровно три выстрела, чтобы поразить мишень;
 - от четырёх до пяти попыток.
- Результат при необходимости округлите до тысячных.
- A4.** Оля пытается отправить СМС-сообщение подруге из леса. Связь в лесу слабая, поэтому при каждой отдельной попытке СМС-сообщение может быть отправлено с вероятностью 0,1. Телефон делает последовательные и независимые попытки до тех пор, пока СМС-сообщение не будет отправлено, но не более 10 попыток. Если все 10 попыток неудачны, телефон сообщает о том, что СМС-сообщение отправить не удалось. Какова вероятность события:
- СМС-сообщение не будет отправлено;
 - СМС-сообщение будет отправлено не позже, чем с пятой попытки?
- Результат при необходимости округлите до сотых.
- A5.** Корабельная артиллерийская система делает выстрел по цели. Если цель не поражена, система делает второй выстрел. Вероятность поражения цели при каждом отдельном выстреле равна $p = 0,7$. Найдите вероятность того, что цель:
- будет поражена вторым выстрелом;
 - не будет поражена.

Уровень В

- B1.** Стрелок на тренировке стреляет по мишени до тех пор, пока не сойдёт её. У стрелка всего 10 патронов. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена, если вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна:
- $p = 0,4$;
 - $p = 0,2$.
- Результаты округлите до тысячных.
- B2.** В случайном опыте одновременно бросают 9 монет. Найдите вероятность того, что выпадет:
- ровно пять орлов;
 - ровно шесть решек.
- Результаты округлите до тысячных.

- В3.** Биатлонист стреляет по пяти различным мишеням. Вероятность поражения каждой отдельной мишени равна 0,7 и не зависит от результатов предыдущих выстрелов. Найдите вероятность того, что биатлонист поразит:
- а) две или три мишени; б) более трёх мишеней.
Результаты округлите до тысячных.
- В4.** Артиллерийская система стреляет по цели до первого попадания в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0,3$. Какое наименьшее число снарядов должно быть, чтобы вероятность поражения цели оказалась:
- а) не ниже чем 0,9; б) не ниже чем 0,99?
- В5.** В условиях плохой мобильной связи (в лифте, вдали от станций) телефон производит серию последовательных попыток отправить СМС-сообщение. Конструкторам поставлена задача, чтобы вероятность отправки СМС-сообщения была не ниже чем 0,9. Делать бесконечное число попыток тоже нельзя во избежание зависания телефона. Найдите наименьшее число попыток, при котором поставленная задача будет выполнена, если вероятность успеха в каждой отдельной попытке равна:
- а) 0,01; б) 0,005.

Уровень С

- С1.** Производится серия одинаковых независимых испытаний до достижения первого успеха. Вероятность успеха в каждом отдельном испытании равна p , а вероятность неудачи равна $q = 1 - p$. Найдите вероятность того, что для достижения успеха потребуется:
- а) не менее k испытаний; б) от k до n испытаний ($k < n$).
- С2.** Однажды Сэмюэль Пипс¹ предложил Исааку Ньютону сравнить вероятности некоторых событий. Вычислите вероятности этих событий:
- а) выпадение хотя бы одной грани с шестью очками при бросании 6 игральных кубиков;
- б) выпадение хотя бы двух граней с шестью очками при бросании 12 игральных кубиков.
- Результаты округлите до сотых.

¹ Сэмюэль Пипс (Samuel Pepys) — чиновник английского адмиралтейства. Был членом и даже президентом Королевского научного общества, членом парламента Великобритании.

- С3.** На одном сайте, посвящённом лотерее «6 из 49», написано: *«В выигрышных наборах номеров 3 чётных и 3 нечётных номера встречаются чаще, чем любые другие комбинации чётных и нечётных. Поэтому для увеличения вероятности выигрыша нужно выбирать такие комбинации, в которых ровно 3 чётных номера и 3 нечётных»*.
- а) Верно ли, что выпадение 3 чётных и 3 нечётных номеров более вероятно, чем выпадение любого другого соотношения чётных и нечётных номеров?
- б) Верно ли, что, выбирая 3 чётных и 3 нечётных номера, можно увеличить вероятность выигрыша по сравнению со случайным выбором 6 номеров?
- С4.** (Задача о разделе ставки¹.) Двое играют в некоторую игру, состоящую из отдельных партий. Игроки одинаково искусны — вероятность победы каждого в каждой отдельной партии равна $\frac{1}{2}$. Победителем считается тот, кто выиграет шесть партий. Он получает денежный приз. После окончания очередной партии игру пришлось внезапно прервать. Игроки решили разделить между собой приз в таком отношении, в каком относятся их шансы на победу, которая случилась бы, если бы игра продолжилась до конца. В каком отношении следует разделить приз, если известно, что игра была прервана при счёте:
- а) 4 : 3 в пользу первого игрока;
- б) 4 : 2 в пользу второго игрока?
- С5.** В самолёте $2n$ пассажиров. На ужин им предлагается два блюда на выбор: рыба с картофелем и курица с рисом. Каждый пассажир с вероятностью 0,5 может предпочесть рыбу и с такой же вероятностью курицу. Поэтому всего на борт загрузили ровно по n порций рыбы и курицы. Если пассажир хочет выбрать блюдо, а оно уже закончилось, то такой пассажир недоволен.
- а) Найдите наиболее вероятное число недовольных пассажиров.
- б) Найдите вероятность того, что недовольных пассажиров будет ровно столько (наиболее вероятное число).

¹ Известно, что эта задача — одна из исторических первых задач теории вероятностей. Она была решена независимо друг от друга Блезом Паскалем и Пьером Ферма.

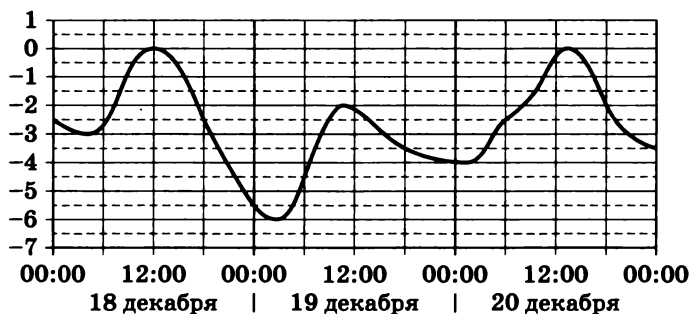
8.1. Чтение графиков реальных зависимостей

Уровень А

А1. На рисунке показано изменение температуры воздуха в течение трёх суток. По горизонтали указаны дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия.

а) Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 19 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.

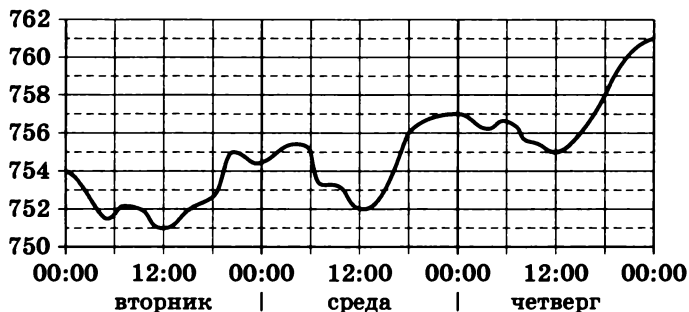
б) Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 20 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



А2. На рисунке показано изменение атмосферного давления в течение трёх суток. По горизонтали указаны дни недели, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба.

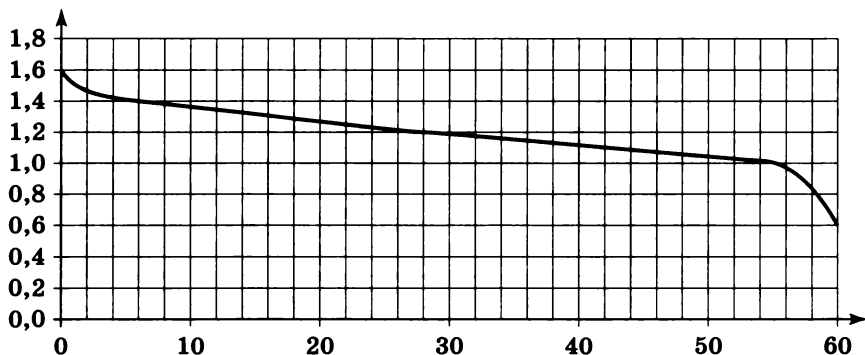
а) Определите по рисунку наибольшее значение атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) во вторник.

б) Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) в среду.



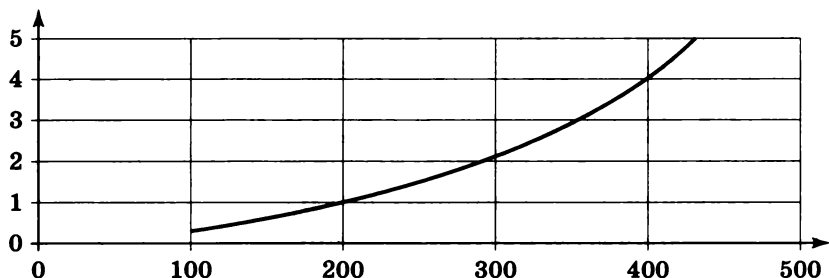
А3. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах.

- а) Определите по графику, за сколько часов работы фонарика напряжение упадёт с 1,6 В до 1 В.
 б) Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первые 6 ч работы фонарика.



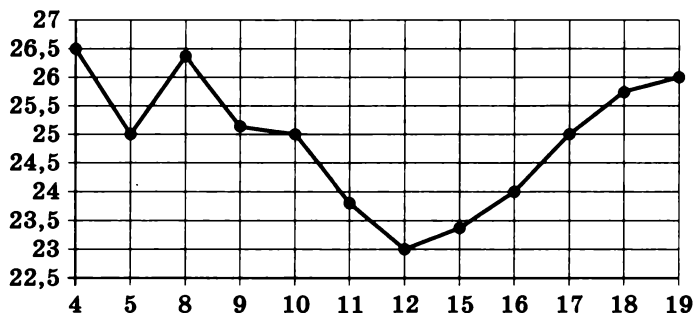
А4. Когда самолёт находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит только от скорости. На графике изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость в километрах в час, на оси ординат — сила в тоннах силы.

- а) В некоторый момент подъёмная сила равнялась одной тонне силы. Определите по графику, на сколько километров в час надо увеличить скорость, чтобы подъёмная сила увеличилась до 4 тонн силы.
 б) Определите по графику, при какой скорости (в километрах в час) подъёмная сила достигает 1 тонны силы.



А5. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 г. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку:

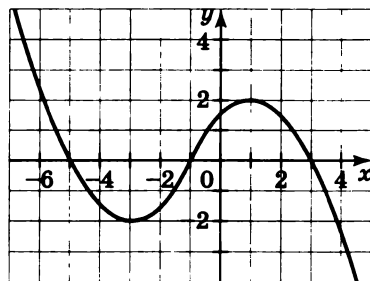
- а) наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов за весь указанный период (в долларах США за баррель);
- б) наибольшую цену нефти на момент закрытия торгов в период с 9 по 19 апреля (в долларах США за баррель).



Уровень В

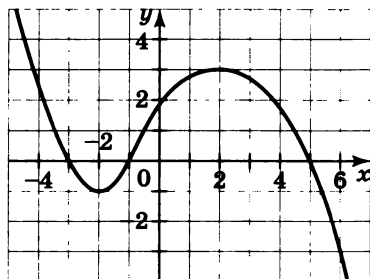
В1. а) По графику функции $y = f(x)$, изображённому на рисунке, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно нулю;
- 2) промежутки возрастания функции;
- 3) значения x , при которых $y > 0$;
- 4) наименьшее значение функции при $x < 0$.



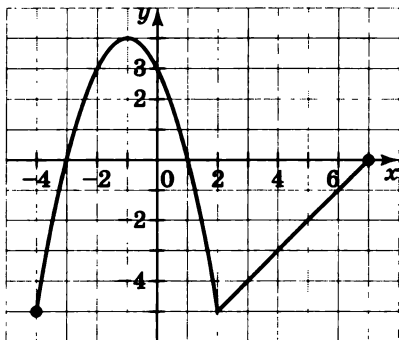
б) По графику функции $y = f(x)$, изображённому на рисунке, найдите:

- 1) значения x , при которых значение y равно нулю;
- 2) промежутки возрастания функции;
- 3) значения x , при которых $y > 0$;
- 4) наибольшее значение функции при $x > 0$.

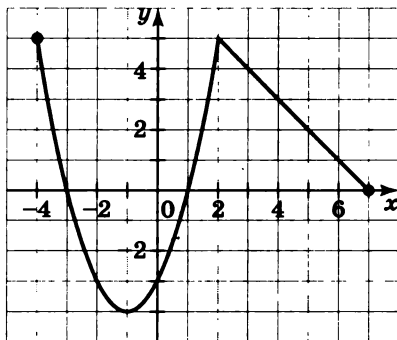


В2. По графику функции $y = f(x)$, изображённому на рисунке, найдите:

- а) 1) область определения функции;
 2) значения x , при которых значение y равно 0;
 3) наибольшее значение $f(x)$;
 4) промежутки возрастания функции.

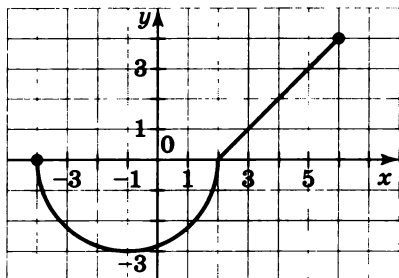


- б) 1) область определения функции;
 2) значения x , при которых значение y равно 0;
 3) наибольшее значение $f(x)$;
 4) промежутки убывания функции.

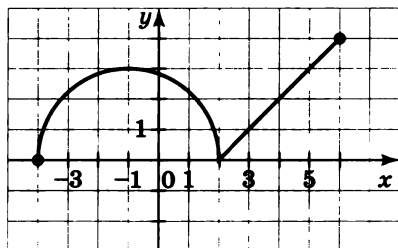


В3. По графику функции $y = f(x)$, изображённому на рисунке, найдите:

- а) 1) область определения функции;
 2) множество значений функции;
 3) значения x , при которых значение y равно -3 ;
 4) промежутки возрастания и убывания функции.

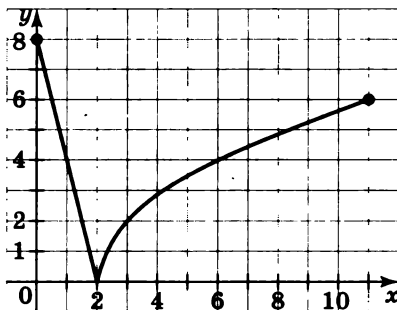


- б) 1) область определения функции;
 2) множество значений функции;
 3) значения x , при которых значение y равно 3;
 4) промежутки возрастания и убывания функции.

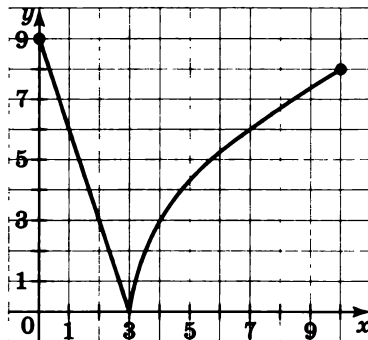


В4. По графику функции $y = f(x)$, изображённому на рисунке, найдите:

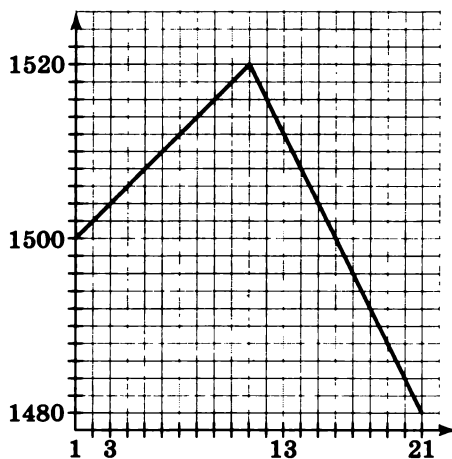
- а) 1) область определения функции;
 2) значения x , при которых значение y равно 4;
 3) значение y при $x = 3$;
 4) все значения x , при которых $y < 4$.



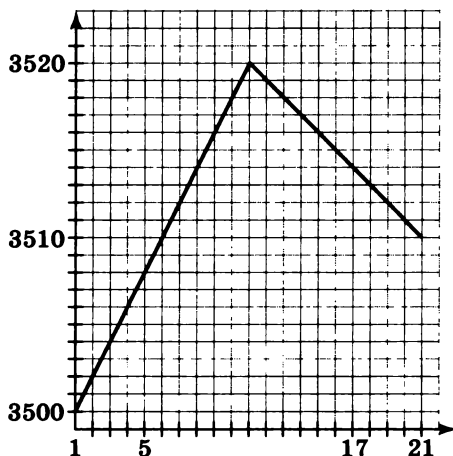
- б) 1) область определения функции;
 2) значения x , при которых значение y равно 6;
 3) значение y при $x = 4$;
 4) все значения x , при которых $y < 6$.



В5. а) 1 ноября компания, производящая компьютеры, объявила об эмиссии (выпуске) акций компании. 3 ноября предприниматель приобрёл 60 акций этой компании. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение курса акций (по оси абсцисс откладываются числа ноября, считая от дня эмиссии, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 13 ноября предприниматель продал все свои акции. Прибыль или убыток принесла ему эта сделка? Сколько рублей получил или потерял предприниматель в результате этой сделки?

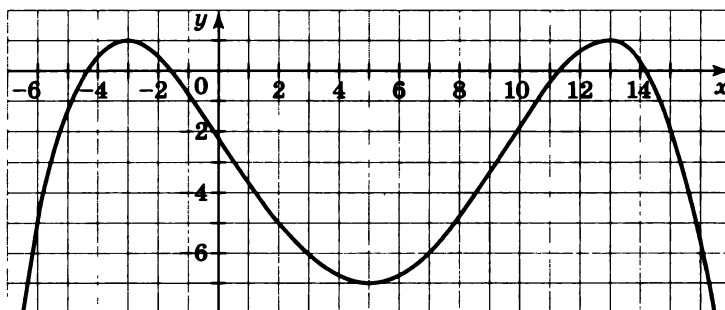


б) 1 декабря компания, производящая аудиотехнику, объявила об эмиссии (выпуске) акций компании. 5 декабря предприниматель приобрёл 90 акций этой компании. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение курса акций (по оси абсцисс откладываются числа декабря, считая от дня эмиссии, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). 17 декабря предприниматель продал все свои акции. Прибыль или убыток принесла ему эта сделка? Сколько рублей получил или потерял предприниматель в результате этой сделки?



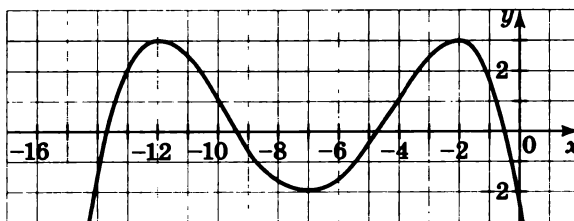
Уровень С

- С1. а) По графику функции $y = f(x)$, изображённого на рисунке, найдите:
- 1) значение y при $x = 5$;
 - 2) наибольшее значение y при $x \in [4; 10]$;
 - 3) значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком функции не более двух общих точек.



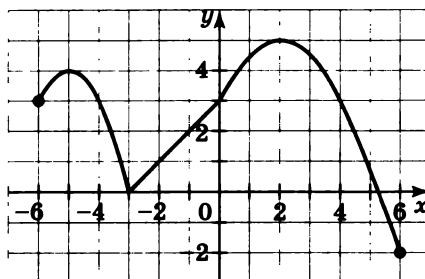
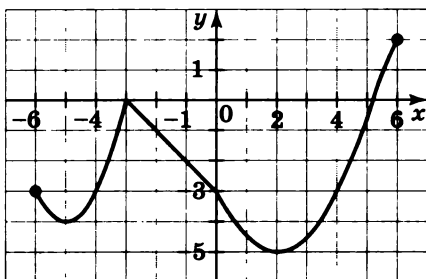
- б) По графику функции $y = f(x)$, изображённого на рисунке, найдите:
- 1) значение y при $x = -7$;

- 2) наименьшее значение y при $x \in [-13; -10]$;
 3) значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком функции не менее трёх общих точек.

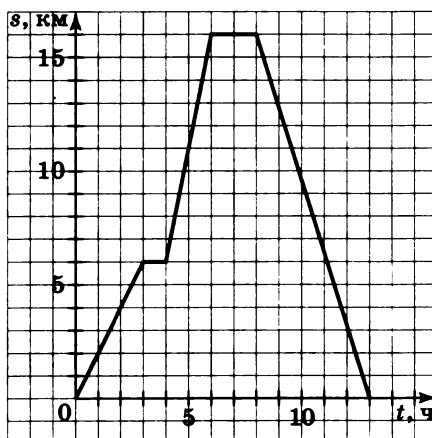


C2. Функция $y = f(x)$ задана графиком, изображённым на рисунке.

- а) 1) Найдите корни уравнения $f(x) = -3$.
 2) Найдите число корней уравнения $f(x) = c$ в зависимости от c .
 б) 1) Найдите корни уравнения $f(x) = 3$.
 2) Найдите число корней уравнения $f(x) = c$ в зависимости от c .



- C3.** а) Турист собрался в поход. В походе он сделал два привала и после второго привала вернулся на турбазу. На рисунке изображён график движения туриста (по горизонтальной оси откладывается время в часах, по вертикальной — расстояние от турбазы в километрах). Используя график, ответьте на вопросы.
 1) Сколько времени турист потратил на привалы?



2) С какой скоростью он шёл от первого до второго привала?

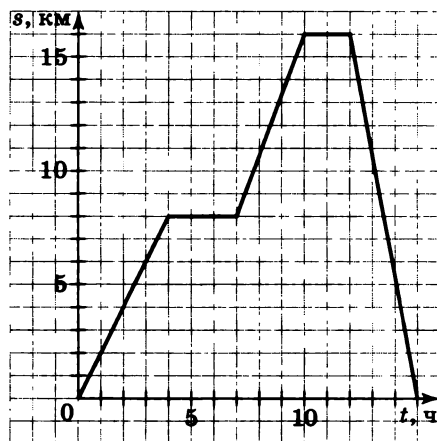
3) Какова средняя скорость туриста за всё время движения (время на привалы не учитывать)?

б) Турист собрался в поход. В походе он сделал два привала и после второго привала вернулся на турбазу. На рисунке изображён график движения туриста (по горизонтальной оси откладывается время в часах, по вертикальной — расстояние от турбазы в километрах). Используя график, ответьте на вопросы.

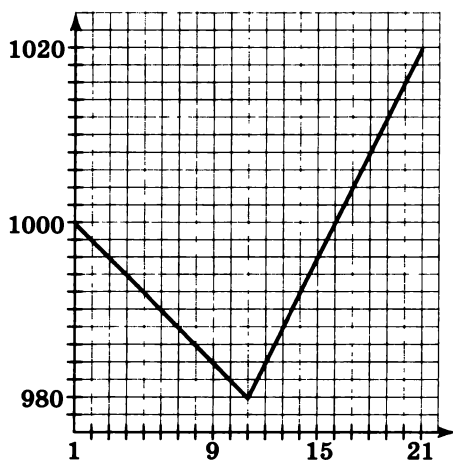
1) Сколько времени турист потратил на привалы?

2) С какой скоростью он шёл от первого до второго привала?

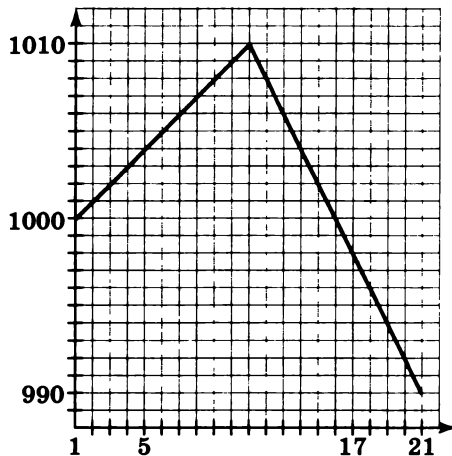
3) Какова средняя скорость туриста за всё время движения (время на привалы не учитывать)?



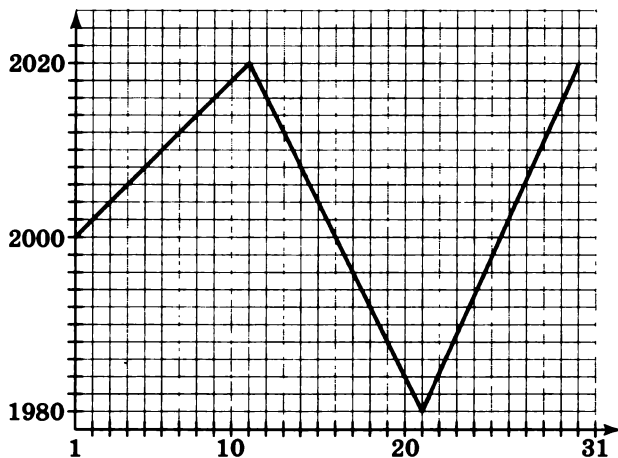
С4. а) 1 сентября предприниматель приобрёл акции шоколадной фабрики. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа сентября, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Однако купленные акции шоколадной фабрики не оправдали ожиданий, и 9 сентября предприниматель продал 20% этих акций, а 15 сентября продал остальные. Сколько процентов убытка принесла предпринимателю эта биржевая операция?



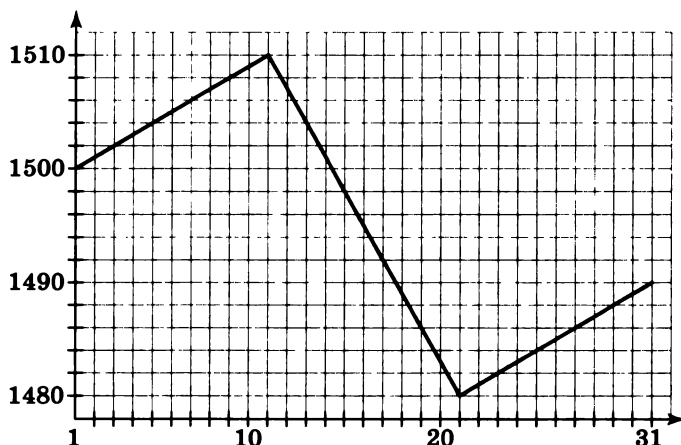
б) 1 октября предприниматель приобрёл акции чаеразвесочной фабрики. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение курса этих акций (по оси абсцисс откладываются числа октября, считая от дня покупки, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Однако купленные акции не оправдали ожиданий, и 5 октября предприниматель продал 10% этих акций, а 17 октября продал остальные. Сколько процентов убытка принесла предпринимателю эта биржевая операция?



- С5. а) На графике представлено изменение курса акций ОАО «АБВ» (по оси абсцисс откладываются числа июля, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Какой наибольший доход могла бы принести одна акция за июль?



- б) На графике представлено изменение курса акций ОАО «ЭЮЯ» (по оси абсцисс откладываются числа августа, а по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Какой наибольший доход могла бы принести одна акция за август?



8.2. Целые рациональные функции

Уровень А

- A1.** Найдите наибольшее значение функции:
 а) $y = 7 - 6x - x^2$; б) $y = 3 - 2x - x^2$.
- A2.** Найдите наименьшее значение функции:
 а) $y = 2x^2 - 4x + 7$; б) $y = 3x^2 + 6x + 1$.
- A3.** Найдите наибольшее значение функции:
 а) $y = -5x^2 - 10x - 7$; б) $y = -4x^2 + 8x + 3$.
- A4.** Найдите промежуток убывания функции:
 а) $y = -4 + 7x - 3x^2$; б) $y = 7 - 3x - 4x^2$.
- A5.** Найдите промежуток возрастания функции:
 а) $y = 2x^2 + 5x + 3$; б) $y = 3x^2 - 5x + 2$.

Уровень В

- B1.** а) Постройте график функции $y = x^2 + 6x + 5$. Напишите уравнение прямой, относительно которой симметричен график этой функции.
 б) Постройте график функции $y = x^2 - 4x - 5$. Напишите уравнение прямой, относительно которой симметричен график этой функции.
- B2.** Постройте график функции:
 а) $y = (2x + 1)^2$; б) $y = (2x - 3)^2$.

- В3.** а) Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 3$. В скольких точках прямая $y = -4$ пересекает этот график?
 б) Постройте график функции $y = x^2 + 4x + 3$. В скольких точках прямая $y = -1$ пересекает этот график?
- В4.** График линейной функции проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(2; -2)$. Постройте график и задайте функцию формулой.
 б) График линейной функции проходит через точки $A(2; -1)$ и $B(1; 3)$. Постройте график и задайте функцию формулой.
- В5.** а) Найдите p и построьте график функции $y = -x^2 + px + 3$, если известно, что он проходит через точку $(2; -5)$.
 б) Найдите p и построьте график функции $y = x^2 + px - 3$, если известно, что он проходит через точку $(-2; 5)$.

Уровень С

- С1.** Постройте график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$ и найдите число решений уравнения $x^2 - 2|x| - 3 = k$ в зависимости от k .
 б) Постройте график функции $y = x^2 + 4|x| - 5$ и найдите число решений уравнения $x^2 + 4|x| - 5 = k$ в зависимости от k .
- С2.** а) Постройте график функции $y = |x^2 + 2|x| - 15|$. Какое наибольшее число общих с графиком точек может иметь прямая, параллельная оси абсцисс?
 б) Постройте график функции $y = |x^2 - 4|x| - 12|$. Какое наибольшее число общих с графиком точек может иметь прямая, параллельная оси абсцисс?
- С3.** а) Наибольшее из чисел m и n обозначается $\max(m; n)$. Если числа равны, то $\max(m; n) = m = n$. Постройте график функции $y = \max(x - 2; -x^2)$;
 б) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m; n)$. Если числа равны, то $\min(m; n) = m = n$. Постройте график функции $y = \min(-5x - 4; x^2)$.
- С4.** а) Наименьшее из чисел m , n и k обозначается $\min(m; n; k)$. Если числа равны, то $\min(m; n; k) = m = n = k$. Постройте график функции $y = \min(x + 2; x^2; -2x)$.
 б) Наибольшее из чисел m , n и k обозначается $\max(m; n; k)$. Если числа равны, то $\max(m; n; k) = m = n = k$. Постройте график функции $y = \max(4x - 5; -x^2; -x)$.
- С5.** а) Постройте график функции
$$\begin{cases} y = 2 - |x|, & \text{если } |x| \geq 2, \\ y = x^2 - 4, & \text{если } |x| < 2. \end{cases}$$

При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график ровно в двух точках?

В2. Какие из указанных функций возрастают при $x < 0$:

а) $y = 7x^2$, $y = -\frac{7}{x}$, $y = 7 - x$; б) $y = -5x^2$, $y = \frac{5}{x}$, $y = 5 - x$?

В3. Найдите промежуток, на котором убывают обе функции:

а) $y = (x + 4)^2$ и $y = \frac{4}{x}$; б) $y = -(x - 7)^2$ и $y = \frac{7}{x}$.

В4. а) Найдите наибольшее значение функции $y = 5 + \frac{6}{x^2 + 6}$.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = 3 - \frac{4}{x^2 + 4}$.

В5. а) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 7}{x^2 + 6}$.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 5}$.

Уровень С

С1. а) Постройте график функции $y = 6 \cdot \frac{4x^2 - 3x}{4x^3 - 3x^2}$. Напишите уравнения всех прямых, параллельных оси абсцисс, которые не имеют общих точек с данным графиком.

б) Постройте график функции $y = 3 \cdot \frac{4x^2 + 3x}{4x^3 + 3x^2}$. Напишите уравнения всех прямых, параллельных оси абсцисс, которые не имеют общих точек с данным графиком.

С2. Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy , для каждой из которых:

а) $\frac{xy + 4}{x + y} = 0$; б) $\frac{9 - xy}{x - y} = 0$.

С3. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x + 2}{x - \frac{4}{x}}$. б) $y = \frac{x - 3}{x - \frac{9}{x}}$.

При каких значениях c прямая $y = c$ не имеет с построенным графиком ни одной общей точки?

С4. а) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{5x^2 + 10x + 14}{x^2 + 2x + 4}$.

При каких значениях x оно достигается?

б) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{3x^2 - 6x + 23}{x^2 - 2x + 5}$.

При каких значениях x оно достигается?

С5. Найдите множество значений функции:

а) $y = \frac{3x^2 + 2x}{4x - 3}$;

б) $y = \frac{4x^2 - x}{3x - 1}$.

8.4. Иррациональные функции

Уровень А

А1. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 15\sqrt{x^2 + 16}$;

б) $y = 24\sqrt{x^2 + 25}$.

А2. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \sqrt{81 - 4x^2}$;

б) $y = \sqrt{64 - 3x^2}$.

А3. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 7 + 8\sqrt{x}$;

б) $y = 8 + 9\sqrt{x}$.

А4. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = 5 - 4\sqrt{x}$;

б) $y = 6 - 5\sqrt{x}$.

А5. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \frac{18}{\sqrt{x^2 + 9}}$;

б) $y = \frac{20}{\sqrt{x^2 + 16}}$.

Уровень В

В1. Определите графически, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y + 3\sqrt{x} = 0, \\ y + x^2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - 3\sqrt{x} = 0, \\ y + x^2 = 2. \end{cases}$

В2. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 + 49}$;

б) $y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 64}$.

При каких значениях x оно достигается?

В3. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 2\sqrt{x - 3} + 3\sqrt{x - 2}$;

б) $y = 4\sqrt{x - 5} + 5\sqrt{x - 4}$.

При каких значениях x оно достигается?

В4. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = 8\sqrt{7-x} + 7\sqrt{8-x}$; б) $y = 6\sqrt{5-x} + 5\sqrt{6-x}$.

При каких значениях x оно достигается?

В5. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 5x + 4\sqrt{x+3}$; б) $y = 4x + 3\sqrt{x+2}$.

При каких значениях x оно достигается?

Уровень С

С1. Найдите наименьшее значение функции и определите, при каких значениях x оно достигается:

а) $y = \frac{6}{\sqrt{5x-4} - \sqrt{5x-8}}$; б) $y = \frac{8}{\sqrt{10x-3} - \sqrt{10x-7}}$.

С2. а) Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sqrt{x+2} - x - 1$.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = x + 2 - 4\sqrt{x-3}$.

С3. Найдите наименьшее значение функции и определите, при каких значениях x оно достигается:

а) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \sqrt{3x^2 + 12x + 28}$;

б) $y = \sqrt{2x^2 + 12x + 27} + \sqrt{x^2 - 2x - 15}$.

С4. Постройте график функции: а) $y = \sqrt{6x - x^2}$; б) $y = -\sqrt{4x - x^2}$.

При каких значениях c прямая $y = c$ пересекает построенный график в единственной точке?

С5. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \sqrt{x^3(54 - x^3)}$; б) $y = \sqrt{x^3(16 - x^3)}$.

8.5. Тригонометрические функции

Уровень А

А1. Какие из следующих утверждений верны?

а) 1) График функции $y = \sin x$ симметричен относительно оси абсцисс.

2) График функции $y = \sin x$ симметричен относительно оси ординат.

3) График функции $y = \sin x$ симметричен относительно начала координат.

4) График функции $y = \sin x$ симметричен относительно прямой $y = x$?

б) 1) График функции $y = \cos x$ симметричен относительно оси абсцисс.

2) График функции $y = \cos x$ симметричен относительно оси ординат.

3) График функции $y = \cos x$ симметричен относительно начала координат.

4) График функции $y = \cos x$ симметричен относительно прямой $y = x$.

Запишите номера правильных ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и других символов.

A2. Эскиз графика какой из функций изображён на рисунке?

а) 1) $y = 2\cos x + 3$;

2) $y = \cos x + 4$;

3) $y = 4\cos x + 1$;

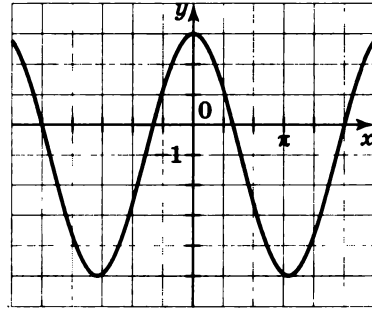
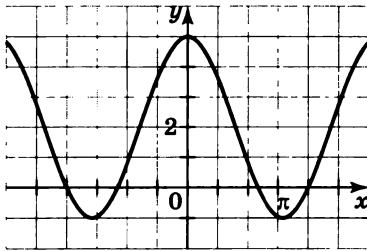
4) $y = 3\cos x + 2$.

б) 1) $y = 2\cos x + 1$;

2) $y = 5\cos x - 2$;

3) $y = 4\cos x - 1$;

4) $y = 3\cos x$.



A3. Эскиз графика какой из функций изображён на рисунке?

а) 1) $y = 3\sin x - 4$;

2) $y = -3\sin x - 4$;

3) $y = 2\sin x - 4$;

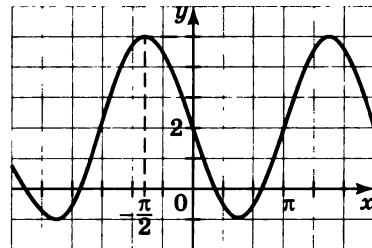
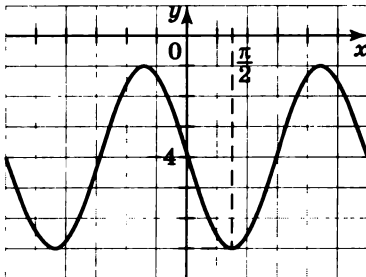
4) $y = -2\sin x - 4$.

б) 1) $y = 2\sin x + 3$;

2) $y = -2\sin x + 3$;

3) $y = 3\sin x + 2$;

4) $y = -3\sin x + 2$.



A4. Найдите множество значений функции:

а) $y = 7 \sin x - 8$;

б) $y = 7 - 8 \sin x$.

A5. Найдите множество значений функции:

а) $y = 9 - 8 \cos x$;

б) $y = 9 \cos x - 8$.

Уровень В

B1. Найдите множество значений функции:

а) $y = 5\sqrt{\sin x} - 4$;

б) $y = 4\sqrt{\cos x} - 5$.

B2. Найдите множество значений функции:

а) $y = 6 \sin^4 x + 7$;

б) $y = 4 \cos^6 x + 5$.

B3. а) Найдите наибольшее значение функции: $y = \frac{16}{\sqrt{\tan^2 x + 16}}$.

б) Найдите наименьшее значение функции: $y = \frac{25}{\sqrt{\tan^2 x + 25}}$.

B4. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = 6 \sin 4x$;

б) $y = 4 \cos 6x$.

B5. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = 8 \cos \frac{\pi x}{10}$;

б) $y = 10 \sin \frac{\pi x}{8}$.

Уровень С

C1. Найдите множество значений функции:

а) $y = \sin x + 4\sqrt{\sin x} + 5$;

б) $y = \cos x + 6\sqrt{\cos x} + 10$.

C2. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = \frac{4}{\sqrt{\cos x}} + 25\sqrt{\cos x} + 3$;

б) $y = \frac{4}{\sqrt{\sin x}} + 9\sqrt{\sin x} + 11$.

C3. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \sin^{2021} x + \cos^{2022} x + 2023$;

б) $y = \sin^{2020} x + \cos^{2023} x + 2024$.

C4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 19 \sin x - 2|3 \sin x - 1| - 3|4 \sin x - 3| + 7$;

б) $y = 3|5 \sin x - 2| + 2|3 \sin x - 4| + 9 - 22 \sin x$.

C5. Найдите все точки графика функции, лежащие на оси абсцисс:

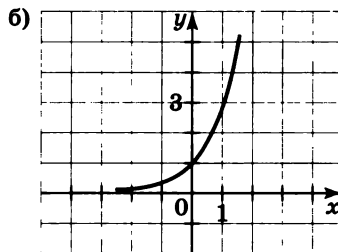
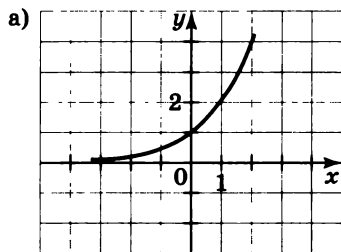
а) $y = 13 - 7 \cos(2\sqrt{13}\pi x) - 6 \cos(2\pi x)$;

б) $y = 11 - 6 \cos(2\sqrt{11}\pi x) - 5 \cos(2\pi x)$.

8.6. Показательная функция

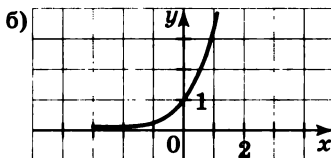
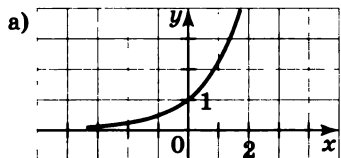
Уровень А

A1. На рисунке изображён график функции $y = a^x$. Найдите a .



A2. На рисунке изображён график функции $y = a^x$. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) $0 < a < 1$; 2) $1 < a < 2$; 3) $2 < a < 3$; 4) $3 < a < 4$.



A3. а) Найдите наибольшее среди чисел $f(-2, 1)$, $f(-1, 9)$, $f(-2, 2)$, $f(-1, 8)$, если $f(x) = 7^x$.

б) Найдите наименьшее среди чисел $f(-3, 2)$, $f(-2, 3)$, $f(-3, 1)$, $f(-1, 3)$, если $f(x) = 6^x$.

A4. а) Найдите наименьшее среди чисел $f(-4, 5)$, $f(-5, 4)$, $f(-4, 3)$, $f(-3, 4)$, если $f(x) = (0, 3)^x$.

б) Найдите наибольшее среди чисел $f(-6, 7)$, $f(-7, 6)$, $f(-6, 5)$, $f(-5, 6)$, если $f(x) = (0, 2)^x$.

A5. а) Найдите наименьшее значение функции $y = 4 \cdot 5^{|x|}$.

б) Найдите наибольшее значение функции: $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{|x|}$.

Уровень В

B1. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = 2^{-x} + (0, 2)^x$ на отрезке $[-1; 3]$;

б) $y = 5^{-x} + (0, 5)^x$ на отрезке $[-1; 4]$.

B2. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = 5 - 3 \cdot 4^{|x|}$;

б) $y = 7 - 2 \cdot 5^{|x|}$.

В3. Найдите множество значений функции:

а) $y = 5^{\cos x} + 2$;

б) $y = 2^{\sin x} + 5$.

В4. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 16^x - 4^{x+1} + 9$;

б) $y = 4^x - 2^{x+3} + 19$.

В5. Найдите множество значений функции:

а) $y = \frac{400^{\sin x} - 9}{20^{\sin x} + 3}$;

б) $y = \frac{100^{\cos x} - 49}{10^{\cos x} + 7}$.

Уровень С

С1. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = \frac{18}{\sqrt{7^{|x|} + 24} - \sqrt{7^{|x|} + 15}}$;

б) $y = \frac{27}{\sqrt{6^{|x|} + 35} - \sqrt{6^{|x|} + 8}}$.

С2. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 3|7^{\cos x} - 2| + 9|7^{\cos x} - 4| - 4|7^{\cos x} - 5| - 7^{\cos x} + 3$;

б) $y = 2|5^{\sin x} - 8| + 7|5^{\sin x} - 7| - 3|5^{\sin x} - 6| - 5^{\sin x} + 2$.

С3. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 4 \cdot 81^x + 25 \cdot 9^{1-2x} + 7$;

б) $y = 49 \cdot 16^x + 9 \cdot 4^{3-2x} + 5$.

С4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 4^{\frac{4x-1}{x^2-2x+2}}$;

б) $y = 5^{\frac{4x-9}{x^2-6x+10}}$.

С5. Найдите наибольшее значение функции и определите, при каких значениях x оно достигается:

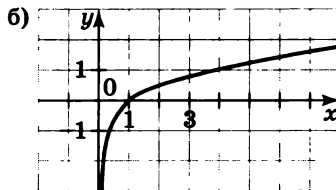
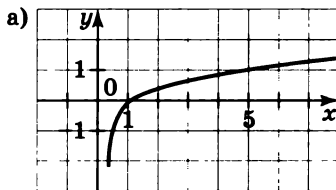
а) $y = 3^x + \sqrt{2 - 2 \cdot 9^x}$;

б) $y = 7^x + \sqrt{6 - 6 \cdot 49^x}$.

8.7. Логарифмическая функция

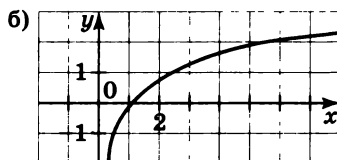
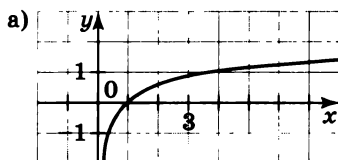
Уровень А

А1. На рисунке изображён график функции $y = \log_a x$. Найдите a .



A2. На рисунке изображён график функции $y = \log_a x$. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) $0 < a < 1$; 2) $1 < a < 2$; 3) $2 < a < 3$; 4) $3 < a < 4$.



- A3.** а) Найдите наибольшее среди чисел $f(3,2)$, $f(2,3)$, $f(3,1)$, $f(1,3)$, если $f(x) = \log_7 x$.
 б) Найдите наибольшее среди чисел $f(4,3)$, $f(3,4)$, $f(4,1)$, $f(1,4)$, если $f(x) = \log_{0,7} x$.
- A4.** а) Найдите наименьшее среди чисел $f(5,5)$, $f(5,6)$, $f(5,7)$, $f(5,8)$, если $f(x) = \log_{0,1}(6 - x)$.
 б) Найдите наименьшее среди чисел $f(-4,5)$, $f(-4,6)$, $f(-4,7)$, $f(-4,8)$, если $f(x) = \lg(x + 5)$.
- A5.** а) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \log_5 x$ на отрезке $[0,2; 25]$.
 б) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \log_2 x$ на отрезке $[0,5; 8]$.

Уровень В

- B1.** а) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 4\lg x + 5$ на отрезке $[0,1; 100]$.
 б) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 5\lg x + 4$ на отрезке $[0,01; 10]$.
- B2.** а) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \log_{0,04}(x + 6)$ на отрезке $[-1; 119]$.
 б) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \log_{0,25}(x + 5)$ на отрезке $[-3; 3]$.
- B3.** Найдите наибольшее значение функции:
 а) $y = 5\lg(1000 - 9x^2) + 6$; б) $y = 6\lg(100 - 7x^2) - 5$.
- B4.** Найдите множество значений функции:
 а) $y = \log_{\frac{1}{3}}(26\sin^2 x + 1)$; б) $y = \log_{\frac{1}{6}}(35\cos^2 x + 1)$.
- B5.** Найдите наибольшее значение функции:
 а) $y = \log_{0,2}(x^2 - 4x + 9)$; б) $y = \log_{0,5}(x^2 - 6x + 13)$.

Уровень С

С1. Найдите множество значений функции:

а) $y = \log_2(3\sin 3x + 5\sqrt{2} - 3\cos 3x)$;

б) $y = \log_2(7\cos 7x + 9\sqrt{2} - 7\sin 7x)$.

С2. Найдите наименьшее значение функции и укажите, при каких значениях x оно достигается:

а) $y = \lg^2(x+1) + 4\lg(x+2) \cdot \log_{x+2}(x+1)$;

б) $y = \lg^2(x+2) + 2\lg(x+3) \cdot \log_{x+3}(x+2)$.

С3. Найдите наименьшее значение функции и укажите, при каких значениях x оно достигается:

а) $y = \sqrt{\log_{16}^2 x + 1} + \sqrt{(\log_{16} x - 3)^2 + 9}$;

б) $y = \sqrt{\log_8^2 x + 1} + \sqrt{(\log_8 x - 4)^2 + 4}$.

С4. Найдите наименьшее значение функции и укажите, при каких значениях x оно достигается:

а) $y = |\log_2 x| + \left| \log_2 \frac{8}{x} \right| + \log_3^2(x-3)$;

б) $y = |\log_3 x| + \left| \log_3 \frac{9}{x} \right| + \log_2^2(x-2)$.

С5. Найдите наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$ функции:

а) $y = \log_{0,7} \frac{\sqrt{4x^4 - 3x^2 + 9} - \sqrt{4x^4 - 8x^2 + 9}}{x}$;

б) $y = \log_{0,3} \frac{\sqrt{16x^4 - 4x^2 + 25} - \sqrt{16x^4 - 15x^2 + 25}}{x}$.

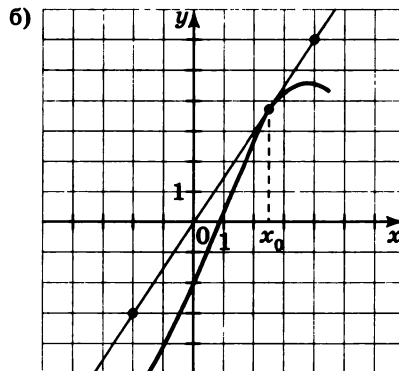
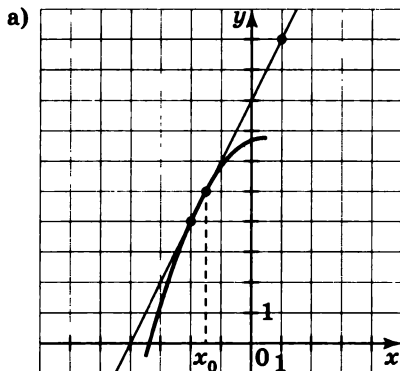
При каких значениях x оно достигается?

ГЛАВА 9. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

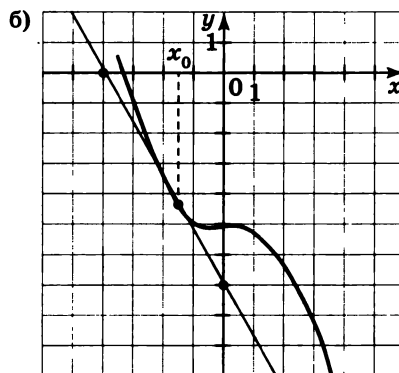
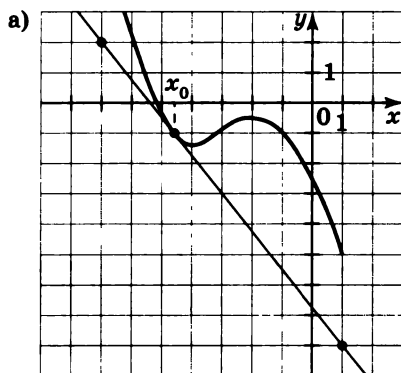
9.1. Графические интерпретации

Уровень А

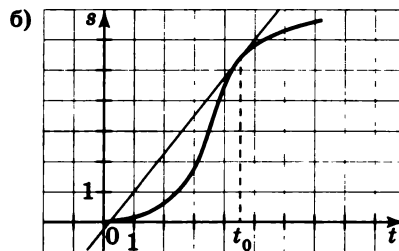
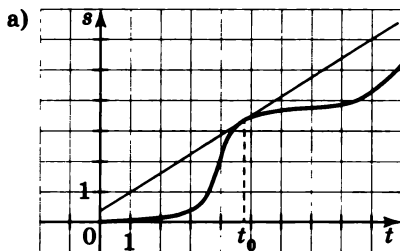
- A1.** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



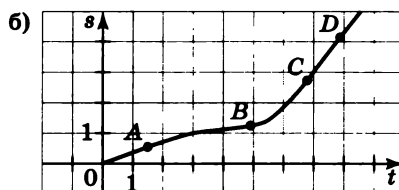
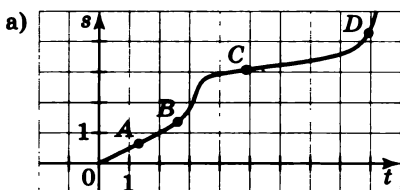
- A2.** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



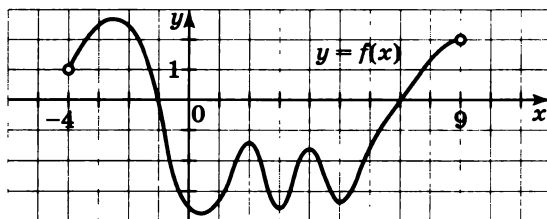
- A3.** На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой t_0 . По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0 . Ответ дайте в метрах в секунду.



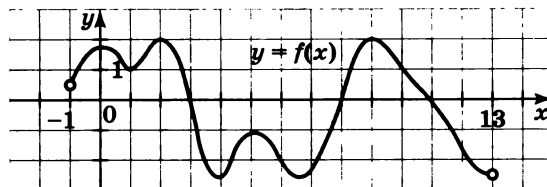
- A4.** На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D , соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A ; 2) t_B ; 3) t_C ; 4) t_D . В какой из этих моментов времени скорость тела была наименьшей? В ответе укажите номер этого момента.



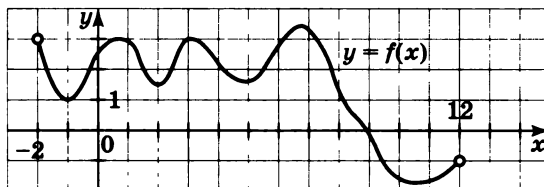
- A5.** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Определите количество целых точек, в которых:
- производная функции отрицательна;
 - производная функции положительна.



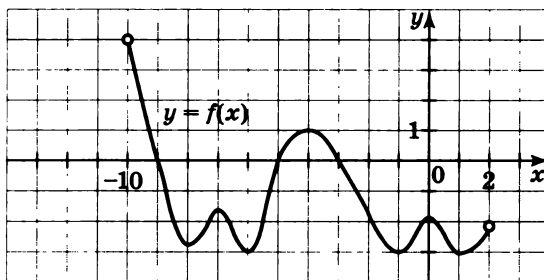
- A6.** а) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[3; 11]$.



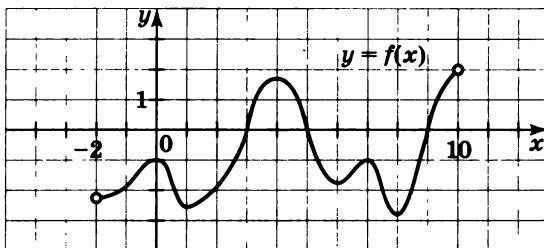
б) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[5,5; 10]$.



A7. а) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 2)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



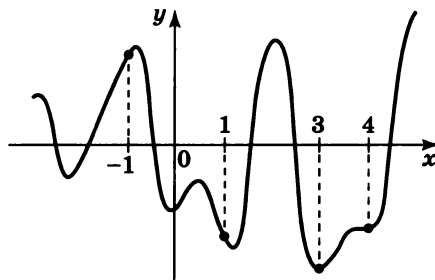
б) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



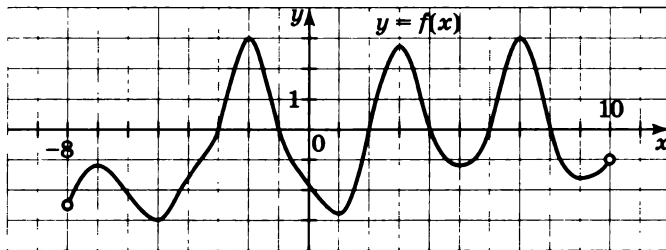
A8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-1, 1, 3, 4$.

а) В какой из этих точек значение производной наибольшее?

б) В какой из этих точек значение производной наименьшее?

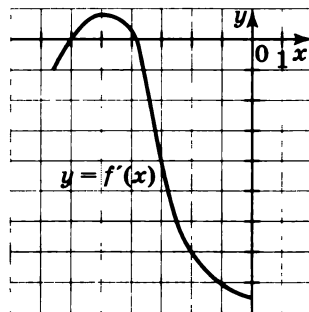


- A9.** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 10)$.



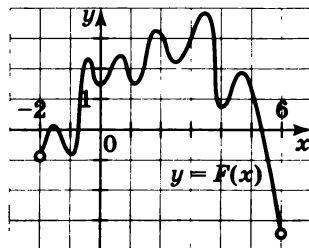
- а) Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 7]$.
 б) Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 5]$.

- A10.** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$.



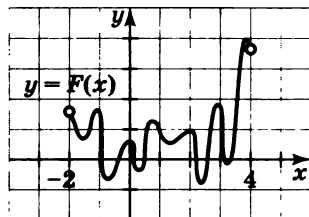
- а) Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 10 - 7x$ или совпадает с ней.
 б) Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 5 - 4x$ или совпадает с ней.

- A11.** а) На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 6)$.



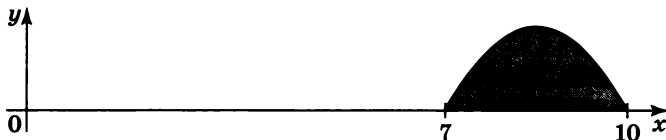
В ответе укажите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 5]$.

- б) На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 4)$.



В ответе укажите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 3]$.

- A12.** а) На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.
 Функция $F(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{51}{10}x^2 - 42x - \frac{7}{11}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



- б) На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.
 Функция $F(x) = -\frac{4}{5}x^3 + \frac{108}{5}x^2 - 192x - 1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



9.2. Целые рациональные функции

Уровень А

- A1.** а) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 2$.
 б) Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 5x^2 + 8x + 3$.
- A2.** а) Найдите точку максимума функции $y = 8 + 9x - \frac{x^3}{3}$.
 б) Найдите точку минимума функции $y = 9 + 4x - \frac{x^3}{3}$.
- A3.** Найдите промежутки возрастания функции:
 а) $y = 28 + 27x - x^3$; б) $y = 13 + 12x - x^3$.
- A4.** Найдите промежутки убывания функции:
 а) $y = 2x^3 - 24x + 13$; б) $y = 2x^3 - 54x + 11$.
- A5.** а) Прямая касается графика функции $y = 2 - 3x - 4x^2$ в точке с абсциссой 1. Напишите уравнение этой прямой.
 б) Прямая касается графика функции $y = 3 - 4x - 5x^2$ в точке с абсциссой -1. Напишите уравнение этой прямой.

- A6.** а) Найдите наибольшее значение функции $y = 4x^2 - 4x - x^3 + 3$ на отрезке $[1; 3]$.
 б) Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[1; 4]$.
- A7.** а) Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 15$ на отрезке $[1; 5]$.
 б) Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 4x^2 + 4x - 5$ на отрезке $[-3; -1]$.
- A8.** а) Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 6t^3 - 7t^2 + 13t$ (расстояние s измеряется в метрах, время t измеряется в минутах). Найдите скорость точки в момент времени $t = 3$.
 б) Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 5t^3 - 6t^2 + 12t$ (расстояние s измеряется в метрах, время t измеряется в минутах). Найдите скорость точки в момент времени $t = 4$.
- A9.** а) Для функции $y = 6x + 5$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(-1; 2)$.
 б) Для функции $y = 4x + 3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(1; 5)$.
- A10.** а) Для функции $y = 7 - 8x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(1; 7)$.
 б) Для функции $y = 9 - 10x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(-1; -6)$.

Уровень В

- B1.** Найдите значение производной функции:
- а) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{12} + 5x + \sqrt{5}$ в точке $x_0 = -2$;
 б) $f(x) = \frac{x^4}{9} + \frac{x^3}{27} - 2x - 3\sqrt{5}$ в точке $x_0 = -3$.
- B2.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + 2x + 23$ в точке этого графика с абсциссой, равной -2 .
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -\frac{x^4}{27} - \frac{x^2}{3} - 2x + 7$ в точке этого графика с абсциссой, равной -3 .

- В3.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 5x^2 + 3x - 8$, если угловой коэффициент касательной равен -17 .
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 + 5x - 1$, если угловой коэффициент касательной равен 21 .
- В4.** а) Касательная к графику функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4$ параллельна прямой $y = -5x$. Напишите уравнение этой касательной.
 б) Касательная к графику функции $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x - 9$ параллельна прямой $y = 6x$. Напишите уравнение этой касательной.
- В5.** а) Касательная к графику функции $f(x) = -2x^3 - 12x^2 - 23x - 8$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45° . Найдите координаты точки касания.
 б) Касательная к графику функции $f(x) = 3x^3 + 18x^2 + 37x - 2$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45° . Найдите координаты точки касания.
- В6.** а) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 2t^2 + 3t$. Найдите её скорость в момент времени $t = 1$.
 б) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 + 2t^2 - 3t$. Найдите её скорость в момент времени $t = 2$.
- В7.** а) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^2 + 4t + 2$. Найдите путь, пройденный точкой к тому моменту, когда её скорость стала равной 16 .
 б) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 4t^2 + 7t + 1$. Найдите путь, пройденный точкой к тому моменту, когда её скорость стала равной 15 .
- В8.** а) Для функции $f(x) = x^2(2x - 1)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку с координатами $(1; 2)$.
 б) Для функции $f(x) = x^2(2x + 1)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку с координатами $(1; 3)$.
- В9.** а) Даны функции $f(x) = 2x + 4$ и $g(x) = x^2 - 8$. Найдите значение выражения $(g(x) \cdot f(x))' - g(x) \cdot f'(x)$ в точке $2,5$.
 б) Даны функции $f(x) = x + 3$ и $g(x) = x^2 - 5$. Найдите значение выражения $(g(x) \cdot f(x))' - g(x) \cdot f'(x)$ в точке $3,5$.
- В10.** Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке графика с ординатой 0 :

а) $f(x) = \frac{x^{16} + 28x^8}{16}$; б) $f(x) = \frac{x^{18} + 13x^8}{26}$.

Уровень С

- С1.** а) Напишите уравнения всех касательных к графику функции $f(x) = 5x^2 + 20$, проходящих через начало координат.
б) Напишите уравнения всех касательных к графику функции $f(x) = 2x^2 + 32$, проходящих через начало координат.
- С2.** а) Угловой коэффициент касательной к графику функции $y(x) = x^3 - 8x^2 + 8x + 8$ равен значению функции в точке касания. Найдите абсциссу точки касания.
б) Угловой коэффициент касательной к графику функции $y(x) = x^3 + 11x^2 + 29x + 29$ равен значению функции в точке касания. Найдите абсциссу точки касания.
- С3.** Найдите наименьший из возможных углов, образуемых с положительным направлением оси абсцисс касательными к графику функции:
а) $f(x) = \frac{16x^3}{3} - 12x^2 + 14x + 1$; б) $f(x) = \frac{4x^3}{3} - 12x^2 + 40x + 7$.
- С4.** а) Касательная к графику функции $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x - 3$ образует с положительным направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов. Напишите уравнение касательной.
б) Касательная к графику функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x + 1$ образует с положительным направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов. Напишите уравнение касательной.
- С5.** Напишите уравнение той касательной к графику функции $y(x)$, которая имеет наибольший угловой коэффициент, если:
а) $y(x) = -x^3 - 6x^2 + 3$; б) $y(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$.
- С6.** Найдите площади равнобедренных треугольников, каждый из которых ограничен осями координат и одной из касательных к графику функции:
а) $f(x) = x^2 - 9x + 2$; б) $f(x) = x^2 + 5x - 1$.
- С7.** а) Наибольшее значение первообразной для функции $f(x) = x^2 - 10x + 32$ на отрезке $[-5; 0]$ равно 86. Найдите наименьшее значение этой первообразной на данном отрезке.
б) Наибольшее значение первообразной для функции $f(x) = x^2 + 8x + 32$ на отрезке $[-6; 0]$ равно 85. Найдите наименьшее значение этой первообразной на данном отрезке.

- С8.** а) На графике первообразной для функции $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - 26$ есть ровно две точки, у каждой из которых абсцисса равна ординате. Найдите все такие первообразные.
- б) На графике первообразной для функции $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - 11$ есть ровно две точки, у каждой из которых абсцисса равна ординате. Найдите все такие первообразные.
- С9.** а) Один из нулей первообразной для функции $f(x) = (x+1)(x-4)^5$ равен 4. Найдите остальные нули.
- б) Один из нулей первообразной для функции $f(x) = (x-2)(x-3)^7$ равен 3. Найдите остальные нули.
- С10.** а) В точке с абсциссой $x_0 = 7$ графика функции $f(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$ проведена касательная к этому графику. Найдите абсциссы тех точек касательной, отношение расстояния от каждой из которых до оси абсцисс к расстоянию до оси ординат равно 50.
- б) В точке с абсциссой $x_0 = -2$ графика функции $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ проведена касательная к этому графику. Найдите абсциссы тех точек касательной, отношение расстояния от каждой из которых до оси абсцисс к расстоянию до оси ординат равно 3.

9.3. Дробно-рациональные функции

Уровень А

- A1.** Найдите: а) $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, если $f(x) = 2x^{-3}$; б) $f'\left(\frac{1}{3}\right)$, если $f(x) = 3x^{-2}$.
- A2.** Найдите: а) $y'(-1)$, если $y(x) = \frac{4}{x^5}$; б) $y'(1)$, если $y(x) = \frac{9}{x^3}$.
- A3.** а) Найдите $f'\left(\frac{3}{4}\right)$, если $f(x) = 10x + 9x^{-1} - 3$.
- б) Найдите $f'\left(\frac{2}{3}\right)$, если $f(x) = 6x + 4x^{-1} - 5$.
- A4.** Найдите:
- а) $g'(-1)$, если $g(x) = \frac{7x^2 + 8x + 9}{x}$;
- б) $g'(-1)$, если $g(x) = \frac{9x^2 + 8x + 7}{x}$.

A5. Найдите значение производной функции:

а) $f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 1}{x^2}$ в точке $x_0 = -3$;

б) $f(x) = \frac{3x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^2}$ в точке $x_0 = -1$.

A6. Найдите точку максимума функции:

а) $y = x + \frac{16}{x}$;

б) $y = x + \frac{25}{x}$.

A7. Найдите точку минимума функции:

а) $y = 49x + \frac{1}{x}$;

б) $y = x + \frac{36}{x}$.

A8. Найдите промежутки возрастания функции:

а) $y = x + 4x^{-1}$;

б) $y = x + 9x^{-1}$.

A9. Найдите промежутки убывания функции:

а) $y = \frac{4x^2 + 25}{x}$;

б) $y = \frac{9x^2 + 16}{x}$.

A10. а) Напишите уравнение касательной к графику функции

$f(x) = \frac{16}{x}$ в точке этого графика с абсциссой $x_0 = -4$.

б) Напишите уравнение касательной к графику функции

$f(x) = \frac{4}{x}$ в точке этого графика с абсциссой $x_0 = -2$.

Уровень В

B1. а) Напишите уравнение касательной к графику функции

$f(x) = \frac{2}{3x^2}$ в точке этого графика с абсциссой $x_0 = 2$.

б) Напишите уравнение касательной к графику функции

$f(x) = -\frac{3}{4x^2}$ в точке этого графика с абсциссой $x_0 = -3$.

B2. а) Напишите уравнения всех касательных к графику функции

$f(x) = \frac{7x + 12}{x}$, параллельных прямой $y = -3x$.

б) Напишите уравнения всех касательных к графику функции

$f(x) = \frac{5x - 9}{x}$, параллельных прямой $y = x$.

- В3.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + 5x$ в точке этого графика с абсциссой -1 .
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} + 4x$ в точке этого графика с абсциссой 1 .
- В4.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{2-3x}{6x^2} + 5x$ в точке этого графика с абсциссой $-\frac{1}{2}$.
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{2x+3}{6x^2} - 5x$ в точке этого графика с абсциссой $-\frac{1}{3}$.
- В5.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{4x^2 - 5x - 1}{x}$ в точке этого графика с абсциссой -2 .
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 3}{x}$ в точке этого графика с абсциссой -3 .
- В6.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 5x - 1}{x}$ в точке с абсциссой $\frac{1}{2}$.
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 5x - 3}{x}$ в точке с абсциссой $\frac{1}{3}$.
- В7.** а) Для функции $f(x) = 6x - \frac{5}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$ найдите первообразную $F(x)$, если $F(1) = -2$.
- б) Для функции $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$ найдите первообразную $F(x)$, если $F(1) = -5$.
- В8.** а) Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{7+2x}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Найдите $F(11)$, если $F(8) = 15$.
- б) Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{3+8x}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Найдите $F(7)$, если $F(4) = 7$.

- B9.** а) Для функции $f(x) = \frac{3}{5x^2}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(-1; -3)$.
 б) Для функции $f(x) = -\frac{4}{3x^2}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(1; 3)$.
- B10.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{5x-2}{3x-16}$ в точке этого графика с абсциссой 2.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{4x-3}{x-3}$ в точке этого графика с абсциссой $-\frac{3}{4}$.

Уровень С

- C1.** а) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x) = -\frac{1}{6x}$, проходящих через точку $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$.
 б) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x) = \frac{2}{3x}$, проходящих через точку $(1; \frac{1}{2})$.
- C2.** а) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x) = \frac{4}{x^2+7}$, проходящих через точку $(-5; 0)$.
 б) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x) = \frac{3}{x^2-11}$, проходящих через точку $(-4; 0)$.
- C3.** а) Найдите абсциссы точек касания тех касательных к графику функции

$$y = \frac{5}{x - \frac{81}{x + \frac{81}{x}}},$$

угловой коэффициент которых равен $-\frac{14}{135}$.

- б) Найдите абсциссы точек касания тех касательных к графику функции

$$y = \frac{9}{x - \frac{64}{x + \frac{64}{x}}},$$

угловой коэффициент которых равен $-\frac{17}{216}$.

С4. Найдите площадь треугольника, стороны которого лежат на осях координат и на касательной, проведённой к графику функции:

а) $f(x) = 3x - \frac{4}{x}$ в точке этого графика с абсциссой $-\frac{2}{3}$;

б) $f(x) = 4x - \frac{2}{x}$ в точке этого графика с абсциссой $\frac{1}{2}$.

С5. а) Касательная к графику функции $f(x) = \frac{3}{x} - 3$ и оси координат ограничивают треугольник, один из катетов которого в 12 раз больше другого. Напишите уравнения всех таких касательных.

б) Касательная к графику функции $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ и оси координат ограничивают треугольник, один из катетов которого в 9 раз больше другого. Напишите уравнения всех таких касательных.

С6. а) В каком отношении делится точкой $M\left(6; \frac{2}{3}\right)$ отрезок касательной, проведённой к графику функции $f(x) = \frac{4}{x}$ в точке M , если концы отрезка лежат на осях координат?

б) В каком отношении делится точкой $M\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$ отрезок касательной, проведённой к графику функции $f(x) = \frac{3}{x}$ в точке M , если концы отрезка лежат на осях координат?

С7. Найдите промежутки возрастания и убывания первообразной для функции:

а) $f(x) = \frac{x^6 - 16x^4}{x^2 - 5x + 105}$; б) $f(x) = \frac{x^6 - 25x^4}{x^2 + 2x + 98}$.

С8. а) Решите уравнение $F(x) = F(5)$, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = \frac{3x^2 + 7}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

б) Решите уравнение $F(x) = F(2)$, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = \frac{5x^2 + 4}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

- С9.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x}{7x+15}$ в точке пересечения этого графика с прямой $y = -2$.
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x}{8x+23}$ в точке пересечения этого графика с прямой $y = 3$.
- С10.** а) Касательная к графику функции $f(x) = \frac{1}{12x}$ проходит через точку $M(-1; 14)$. Найдите абсциссу точки касания.
- б) Касательная к графику функции $f(x) = \frac{5}{6x}$ проходит через точку $M(-5; 8)$. Найдите абсциссу точки касания.

9.4. Иррациональные функции

Уровень А

- А1.** Найдите:
- а) $f'(9)$, если $f(x) = 36\sqrt{x}$; б) $f'(16)$, если $f(x) = -40\sqrt{x}$.
- А2.** Найдите:
- а) $f'(1)$, если $f(x) = 28x^{\frac{5}{7}}$; б) $f'(1)$, если $f(x) = 32x^{\frac{7}{8}}$.
- А3.** Найдите:
- а) $f'\left(\frac{1}{16}\right)$, если $f(x) = \frac{x-25}{\sqrt{x}+5}$; б) $f'\left(\frac{1}{36}\right)$, если $f(x) = \frac{x-36}{\sqrt{x}+6}$.
- А4.** Найдите:
- а) $f'(9)$, если $y = \frac{5x\sqrt{x}-24x}{\sqrt{x}}$; б) $f'(4)$, если $y = \frac{3x\sqrt{x}-20x}{\sqrt{x}}$.
- А5.** Найдите точку минимума функции:
- а) $y = x - 12\sqrt{x} + 11$; б) $y = x - 14\sqrt{x} + 13$.
- А6.** Найдите точку максимума функции:
- а) $y = 6\sqrt{x} - x - 7$; б) $y = 10\sqrt{x} - x + 3$.
- А7.** а) Прямая касается графика функции $y = 14\sqrt{x}$ в точке с абсциссой 49. Найдите угол, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.
- б) Прямая касается графика функции $y = 6\sqrt{x}$ в точке с абсциссой 27. Найдите угол, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

- A8.** а) Прямая касается графика функции $y = -2\sqrt{5x}$ в точке с абсциссой 15. Найдите угол, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.
 б) Прямая касается графика функции $y = -6\sqrt{2x}$ в точке с абсциссой 6. Найдите угол, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.
- A9.** а) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t + 4\sqrt{t}$ (расстояние x измеряется в метрах, время t измеряется в минутах). Найдите скорость точки в момент времени $t = 4$.
 б) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 5t + 6\sqrt{t}$ (расстояние измеряется в метрах, время t измеряется в минутах). Найдите скорость точки в момент времени $t = 9$.
- A10.** а) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 5t + 12\sqrt[3]{t}$ (расстояние x измеряется в метрах, время t измеряется в минутах). В какой момент времени скорость точки станет равна 6?
 б) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t + 27\sqrt[3]{t}$ (расстояние x измеряется в метрах, время t измеряется в минутах). В какой момент времени скорость точки станет равна 4?

Уровень В

- B1.** а) К графику функции $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 5$ проведена касательная. Тангенс угла, образованного касательной с положительным направлением оси абсцисс, равен $\frac{1}{4}$. Найдите абсциссу точки касания.
 б) К графику функции $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 7$ проведена касательная. Тангенс угла, образованного касательной с положительным направлением оси абсцисс, равен $\frac{1}{2}$. Найдите абсциссу точки касания.

- В2.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{64x - 225}{8\sqrt{x} + 15}$ в точке этого графика с абсциссой 4.
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{81x - 121}{9\sqrt{x} + 11}$ в точке этого графика с абсциссой 4.
- В3.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}} + 2$ в точке графика с абсциссой 4.
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}} - 4$ в точке графика с абсциссой 1.
- В4.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 6x^{\frac{1}{2}} - 1$ в точке этого графика с абсциссой 9.
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -3x^2 - 2x^{\frac{1}{2}} - 4$ в точке этого графика с абсциссой 1.
- В5.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{11 - 5x}$ в точке этого графика с абсциссой 2.
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{21 - 4x}$ в точке этого графика с абсциссой 3.
- В6.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x + \sqrt{6x - 11}$ в точке этого графика с абсциссой 2.
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 6x + \sqrt{3x + 31}$ в точке этого графика с абсциссой -2.
- В7.** а) Для функции $f(x) = 12\sqrt[5]{x} - 3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (3; 4).
- б) Для функции $f(x) = 9\sqrt{x} + 2$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (6; -2).
- В8.** а) График первообразной для функции $f(x) = 2 + \frac{11}{\sqrt{x}}$ проходит через точку (4; -15). Найдите эту первообразную.
- б) График первообразной для функции $f(x) = -10 - \frac{3}{\sqrt{x}}$ проходит через точку (36; 11). Найдите эту первообразную.

- B9.** а) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \frac{\sqrt[30]{11}}{\sqrt[5]{x}}$ в точке его пересечения с графиком функции $g(x) = \frac{\sqrt[30]{5}}{\sqrt[6]{x}}$.
- б) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[3]{x}}$ в точке его пересечения с графиком функции $g(x) = \frac{\sqrt[12]{10}}{\sqrt[4]{x}}$.
- B10.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{4x}{\sqrt[3]{2x-1}+2}$ в точке этого графика с абсциссой 0.
- б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{5x+1}+3}$ в точке этого графика с абсциссой 0.

Уровень С

- C1.** а) Касательная к графику функции $f(x) = \sqrt{2x+7}$ проходит через точку $\left(-\frac{21}{2}; 0\right)$. Найдите тангенс угла, образованного касательной с положительным направлением оси абсцисс.
- б) Касательная к графику функции $f(x) = \sqrt{4x+5}$ проходит через точку $\left(-\frac{15}{4}; 0\right)$. Найдите тангенс угла, образованного касательной с положительным направлением оси абсцисс.
- C2.** а) Найдите угловой коэффициент прямой, касающейся графика функции $y = 2\sqrt{4x+1} - \frac{4}{\sqrt{4x+5} - \sqrt{4x+1}} + \sqrt{4x+5}$ в точке этого графика с абсциссой 6.
- б) Найдите угловой коэффициент прямой, касающейся графика функции $y = \sqrt{3x+7} - \frac{3}{\sqrt{3x+7} - \sqrt{3x+4}} + 2\sqrt{3x+4}$ в точке этого графика с абсциссой 7.
- C3.** а) Прямая касается графика функции $f(x) = \sqrt[3]{4x+3}$ и проходит через точку $\left(-\frac{15}{4}; 0\right)$. Найдите координаты точки пересечения этой прямой с осью ординат.

- б) Прямая касается графика функции $f(x) = \sqrt[3]{3x - 5}$ и проходит через точку $\left(\frac{25}{3}; 0\right)$. Найдите координаты точки пересечения этой прямой с осью ординат.
- C4.** Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = f(x)$, проведённой в точке его пересечения с прямой $y = x$:
- а) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$; б) $f(x) = \sqrt{7 - 6x}$.
- C5.** а) Прямая касается графика функции $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4x + 7}$ в точке с абсциссой -1 . Найдите углы треугольника, ограниченного этой прямой и осями координат.
- б) Прямая касается графика функции $f(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x - 2}$ в точке с абсциссой 1 . Найдите углы треугольника, ограниченного этой прямой и осями координат.
- C6.** Постройте график функции и напишите уравнение касательной к этому графику, проходящей через его точку с абсциссой 6 : а) $y = -\sqrt{100 - x^2}$; б) $y = -\sqrt{225 - x^2}$.
- C7.** а) Найдите площадь треугольника, две вершины которого лежат на графике функции $f(x) = -9\sqrt{|x| - 7}$ и имеют абсциссы 11 и -11 , а третья вершина является пересечением касательных, проведённых к графику данной функции в двух первых вершинах треугольника.
- б) Найдите площадь треугольника, две вершины которого лежат на графике функции $f(x) = -6\sqrt{|x| - 5}$ и имеют абсциссы 21 и -21 , а третья вершина является пересечением касательных, проведённых к графику данной функции в двух первых вершинах треугольника.
- C8.** а) Сравните значения $F(8)$ и $F(9)$, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = \sqrt{8x^{16} + 9} + \frac{1}{\sqrt[3]{9x^{32} + 8}} + 2$.
- б) Сравните значения $F(4)$ и $F(5)$, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = \sqrt{4x^8 + 5} + \frac{1}{\sqrt[3]{5x^{16} + 4}} + 5$.

- С9.** а) Точка движется по кривой $y = \sqrt[3]{x}$ так, что её ордината изменяется по закону $y(t) = \sqrt[3]{7t - 13}$ (координата измеряется в метрах, время — в секундах). Какова скорость изменения абсциссы точки через 2 с после начала движения?
- б) Точка движется по кривой $y = \sqrt[3]{x}$ так, что её ордината изменяется по закону $y(t) = \sqrt[3]{5t - 26}$ (координата измеряется в метрах, время — в секундах). Какова скорость изменения абсциссы точки через 6 с после начала движения?
- С10.** а) Найдите абсциссу точки пересечения прямой $y = -3 - 4x$ и графика первообразной для функции $f(x) = 6\sqrt{4x + 13}$, проходящего через точку $M(-3; -1)$.
- б) Найдите абсциссу точки пересечения прямой $y = -1 - 2x$ и графика первообразной для функции $f(x) = 6\sqrt{2x - 1}$, проходящего через точку $M(1; -3)$.

9.5. Тригонометрические функции

Уровень А

- A1.** а) Найдите $f'\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$, если $f(x) = 3\sin x + 8\cos x$.
- б) Найдите $f'(2\pi)$, если $f(x) = 8\sin x + 3\cos x$.
- A2.** а) Найдите $y'\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, если $y(x) = 9\sqrt{2}\cos x - 7\tg x$.
- б) Найдите $y'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, если $y(x) = 8\sqrt{3}\sin x - 9\tg x$.
- A3.** а) Найдите $g'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, если $g(x) = 11\tg x - 4\sin x$.
- б) Найдите $g'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, если $g(x) = 15\tg x - 8\cos x$.
- A4.** а) Прямая касается графика функции $y = 5x - 6\cos x$ в точке с абсциссой $\frac{\pi}{6}$. Найдите угловой коэффициент этой прямой.
- б) Прямая касается графика функции $y = 7x - 4\sin x$ в точке с абсциссой $\frac{\pi}{3}$. Найдите угловой коэффициент этой прямой.

- A5.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 4x + 3\cos x + 2$ в точке этого графика с абсциссой 0.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 5x + 6\cos x + 7$ в точке этого графика с абсциссой 0.
- A6.** а) Найдите наименьший из угловых коэффициентов, которые могут иметь касательные к графику функции $f(x) = 8\sin 7x$.
 б) Найдите наибольший из угловых коэффициентов, которые могут иметь касательные к графику функции $f(x) = 7\cos 8x$.
- A7.** а) Найдите наименьший из угловых коэффициентов, которые могут иметь касательные к графику функции $f(x) = 5\tg 4x$.
 б) Найдите наименьший из угловых коэффициентов, которые могут иметь касательные к графику функции $f(x) = 3\tg 7x$.
- A8.** а) Среди всех касательных к графику функции $y = 2\sqrt{3}\tg \frac{x}{6}$ выбрали те, которые образуют с положительным направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов. Найдите величину этого угла.
 б) Среди всех касательных к графику функции $y = 4\sqrt{3}\tg \frac{x}{4}$ выбрали те, которые образуют с положительным направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов. Найдите величину этого угла.
- A9.** а) Среди всех касательных к графику функции $y = 12\cos \frac{x}{12}$ выбрали те, которые образуют с положительным направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов. Найдите величину этого угла.
 б) Среди всех касательных к графику функции $y = -10\sin \frac{x}{10}$ выбрали те, которые образуют с положительным направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов. Найдите величину этого угла.
- A10.** а) Среди всех касательных к графику функции $y = 4\sqrt{3}\sin \frac{x}{4}$ выбрали те, которые образуют с положительным направлением оси абсцисс наибольший из возможных углов. Найдите величину этого угла.

б) Среди всех касательных к графику функции $y = 2\sqrt{3} \cos \frac{x}{6}$ выбрали те, которые образуют с положительным направлением оси абсцисс наибольший из возможных углов. Найдите величину этого угла.

Уровень В

- В1.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - 5\sin x + 1$ в точке этого графика с абсциссой 0.
б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 5x - 4\sin x + 1$ в точке этого графика с абсциссой 0.
- В2.** а) Найдите абсциссы всех точек, в каждой из которых касательная к графику функции $f(x) = 12x - 9\operatorname{tg} x + 1$ параллельна оси абсцисс.
б) Найдите абсциссы всех точек, в каждой из которых касательная к графику функции $f(x) = 8x - 6\operatorname{tg} x - 1$ параллельна оси абсцисс.
- В3.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4x^8 + 3x + \operatorname{tg} x + 7$ в точке этого графика с абсциссой 0.
б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x^6 + 2x + \operatorname{tg} x + 6$ в точке этого графика с абсциссой 0.
- В4.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2\sin 3x \cos 3x - 5(2x + 1)^{0,4}$ в точке этого графика с абсциссой 0.
б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3\sin 4x \cos 4x - 10(5x + 1)^{0,5}$ в точке этого графика с абсциссой 0.
- В5.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 + 2x + \operatorname{tg} 2x + 7$ в точке этого графика с абсциссой 0.
б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 3x + \operatorname{tg} 5x - 5$ в точке этого графика с абсциссой 0.
- В6.** а) Для функции $f(x) = 5x + \sin \frac{x}{2}$ найдите первообразную, график которой проходит через начало координат.
б) Для функции $f(x) = 2x + \cos \frac{x}{5}$ найдите первообразную, график которой проходит через начало координат.
- В7.** а) Для функции $f(x) = 1 + \cos 6x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{6}; 2\pi\right)$.

- б) Для функции $f(x) = 3 + \sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{2}; -3\pi\right)$.
- В8.** а) Для функции $f(x) = x^2 - 4\cos 3x$ найдите первообразную, которая является нечётной функцией.
 б) Для функции $f(x) = x^4 + 2\cos 2x$ найдите первообразную, которая является нечётной функцией.
- В9.** а) График первообразной для функции $f(x) = 2\sin x + 1$ пересекает ось ординат в точке $(0; 1)$. Найдите эту первообразную.
 б) График первообразной для функции $f(x) = 7\sin x - 2$ пересекает ось ординат в точке $(0; 9)$. Найдите эту первообразную.
- В10.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -9x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 7$ в точке этого графика с абсциссой 0.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -7x - 4\cos^2 \frac{5x}{2} + 4\sin^2 \frac{5x}{2} + 5$ в точке этого графика с абсциссой 0.

Уровень С

- С1.** а) Касательная к графику первообразной для функции $f(x) = 10\sin^2 x - 5\sqrt{3}\sin x + 1$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45° . В ответе укажите абсциссы точек касания.
 б) Касательная к графику первообразной для функции $f(x) = 6\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x - 1$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 135° . В ответе укажите абсциссы точек касания.
- С2.** а) Напишите уравнения всех тех касательных к графику функции $f(x) = -6\tg x + 3$, которые параллельны прямой $y = -6x - 5$.
 б) Напишите уравнения всех тех касательных к графику функции $f(x) = 4\tg x + 1$, которые параллельны прямой $y = 4x + 5$.
- С3.** а) Напишите уравнение той из касательных к графику функции $f(x) = 3\cos x - 4x$, параллельных прямой $y = -x - 2$, абсцисса точки касания которой наименее удалена от начала координат.

- б) Напишите уравнение той из касательных к графику функции $f(x) = 2\cos x - 3x$, параллельных прямой $y = -x - 1$, абсцисса точки касания которой наименее удалена от начала координат.
- С4.** а) Площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = \sin 12x - 3$, параллельной прямой $y = 12x - 1$, равна $\frac{3}{8}$. Напишите уравнение касательной.
- б) Площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = \sin 11x + 1$, параллельной прямой $y = 11x + 7$, равна $\frac{1}{22}$. Напишите уравнение касательной.
- С5.** а) Касательная к графику функции $f(x) = 5x - \sin 3x$ образует с положительным направлением оси абсцисс наибольший из возможных углов и отсекает от осей координат треугольник площадью $\frac{49\pi^2}{16}$. Напишите уравнения всех таких касательных.
- б) Касательная к графику функции $f(x) = 6x - \sin 2x$ образует с положительным направлением оси абсцисс наибольший из возможных углов и отсекает от осей координат треугольник площадью $\frac{25\pi^2}{16}$. Напишите уравнения всех таких касательных.
- С6.** а) Касательная к графику функции $f(x) = 5\tg 2\pi x$ образует с положительным направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов и отсекает от осей координат треугольник площадью 5π . Напишите уравнения всех таких касательных.
- б) Касательная к графику функции $f(x) = 4\tg 3\pi x$ образует с положительным направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов и отсекает от осей координат треугольник площадью 6π . Напишите уравнения всех таких касательных.
- С7.** а) Для функции $f(x) = -\sin 6x \cos 4x$ найдите первообразную, наибольшее значение которой равно 4.
- б) Для функции $f(x) = -\sin 7x \cos 3x$ найдите первообразную, наибольшее значение которой равно 2.
- С8.** а) Для функции $f(x) = 2\cos x - 11\sin x$ найдите первообразную, график которой симметричен относительно оси абсцисс графику производной этой функции.

- б) Для функции $f(x) = 5\cos x + 12\sin x$ найдите первообразную, график которой симметричен относительно оси абсцисс графика производной этой функции.
- С9.** а) Один из экстремумов первообразной для функции $f(x) = 3\cos x - \sqrt{55}\sin x$ равен 1. Найдите все такие первообразные.
- б) Один из экстремумов первообразной для функции $f(x) = -3\cos x - \sqrt{91}\sin x$ равен 1. Найдите все такие первообразные.
- С10.** а) Для функции $f(x) = \cos 6x \cos 18x$ найдите нули первообразной, если один из них равен $-\frac{5\pi}{6}$.
- б) Для функции $f(x) = \sin 2x \sin 6x$ найдите нули первообразной, если один из них равен $-\frac{7\pi}{2}$.

9.6. Показательная функция

Уровень А

- А1.** Найдите: а) $f'(2)$, если $f(x) = \frac{7^x}{\ln 7}$; б) $f'(3)$, если $f(x) = \frac{4^x}{\ln 4}$.
- А2.** Найдите: а) $f'(-3)$, если $f(x) = \frac{3^{-x}}{\ln 3}$; б) $f'(5)$, если $f(x) = \frac{5^{-x}}{\ln 5}$.
- А3.** Найдите:
- а) $y'(-2)$, если $y(x) = \frac{2^x \cdot 5^x}{\ln 10}$; б) $y'(-1)$, если $y(x) = \frac{4^x \cdot 25^x}{\ln 100}$.
- А4.** Найдите:
- а) $f'(-6)$, если $f(x) = \frac{6^{x+8}}{\ln 6}$; б) $f'(-7)$, если $f(x) = \frac{7^{x+9}}{\ln 7}$.
- А5.** Найдите:
- а) $y'(1)$, если $y(x) = \frac{14^x}{2^x \cdot \ln 7}$; б) $y'(-1)$, если $y(x) = \frac{15^x}{3^x \cdot \ln 5}$.
- А6.** а) Найдите $y'(3)$, если $y(x) = x^3 + 5^x - \frac{25^x - 4^x}{5^x - 2^x} + 2^x$.
- б) Найдите $y'(2)$, если $y(x) = x^4 + 7^x - \frac{49^x - 9^x}{7^x - 3^x} + 3^x$.

- A7.** а) Прямая, угловой коэффициент которой равен $27\ln 3$, касается графика функции $y = 3^{x-6}$. Найдите абсциссу точки касания.
 б) Прямая, угловой коэффициент которой равен $25\ln 5$, касается графика функции $y = 5^{x+4}$. Найдите абсциссу точки касания.
- A8.** а) Прямая касается графика функции $y = \frac{5^{x-4}}{\sqrt{3}\ln 5}$ в точке с абсциссой 5. Найдите угол, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.
 б) Прямая касается графика функции $y = \frac{7^{x-6} \cdot \sqrt{3}}{\ln 7}$ в точке с абсциссой 7. Найдите угол, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.
- A9.** а) Прямая касается графика функции $y = 3e^{x-4}$ в его точке с абсциссой 4. Напишите уравнение этой прямой.
 б) Прямая касается графика функции $y = 4e^{x-3}$ в его точке с абсциссой 3. Напишите уравнение этой прямой.
- A10.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x + 1 - 2e^{x-2}$ в точке графика с абсциссой 2.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 5x - 1 + 2e^{x+2}$ в точке графика с абсциссой -2.

Уровень В

- B1.** а) Касательная к графику функции $f(x) = 5x - 8e^x$ параллельна прямой $y = -3x - 16$. Найдите абсциссу точки касания.
 б) Касательная к графику функции $f(x) = 3x + 7e^x$ параллельна прямой $y = 10x + 14$. Найдите абсциссу точки касания.
- B2.** а) Прямая касается графика функции $f(x) = 2e^{x-4} - x - 10\sqrt{x}$ в точке с абсциссой 4. Найдите тангенс угла, образованного с положительным направлением оси абсцисс этой прямой.
 б) Прямая касается графика функции $f(x) = -3e^{x-9} - 4x + 15\sqrt{x}$ в точке с абсциссой 9. Найдите тангенс угла, образованного с положительным направлением оси абсцисс этой прямой.
- B3.** а) Касательная к графику функции $f(x) = 14^x - 1$ параллельна прямой $y = x \ln 14 - 20$. Найдите ординату точки касания.
 б) Касательная к графику функции $f(x) = 21^x + 11$ параллельна прямой $y = x \ln 21 - 11$. Найдите ординату точки касания.

- В4.** а) Касательная к графику функции $f(x) = 11^x \ln 29 - 29^x \ln 11$ перпендикулярна к оси ординат. Найдите абсциссу точки касания.
 б) Касательная к графику функции $f(x) = 19^x \ln 28 - 28^x \ln 19$ перпендикулярна к оси ординат. Найдите абсциссу точки касания.
- В5.** а) Касательная к графику функции $f(x) = 6^x - 36x \ln 6 + 5$ перпендикулярна к прямой $x = -19$. Найдите абсциссу точки касания.
 б) Касательная к графику функции $f(x) = 18^x - 18x \ln 18 + 29$ перпендикулярна к прямой $x = -7$. Найдите абсциссу точки касания.
- В6.** а) График первообразной для функции $f(x) = \cos 3x + e^x$ проходит через начало координат. Найдите эту первообразную.
 б) График первообразной для функции $f(x) = \sin 4x + e^x$ проходит через начало координат. Найдите эту первообразную.
- В7.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{5-x}(3x - 14)^4$ в точке этого графика с абсциссой 5.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{2-x}(4x - 7)^4$ в точке этого графика с абсциссой 2.
- В8.** а) График первообразной для функции $f(x) = 7e^x + 3$ пересекает ось ординат в точке $(0; 4)$. Найдите эту первообразную.
 б) График первообразной для функции $f(x) = 2e^x - 3$ пересекает ось ординат в точке $(0; -3)$. Найдите эту первообразную.
- В9.** а) График первообразной для функции $f(x) = e^{x-1} + 2x - 3\pi \cos \pi x$ проходит через точку $(1; 5)$. Найдите эту первообразную.
 б) График первообразной для функции $f(x) = e^{x-2} - 2x + 2\pi \cos \pi x$ проходит через точку $(2; -2)$. Найдите эту первообразную.
- В10.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{x-2} + \sqrt{x+14} + \frac{4}{x} - 1$ в точке этого графика с абсциссой 2.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{x-3} + \sqrt{x+13} + \frac{9}{x} + 4$ в точке этого графика с абсциссой 3.

Уровень С

- С1.** а) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t + e^{9-t} + 38$. С какого момента времени её скорость будет больше 2?

б) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 5t + e^{7-t} + 41$. С какого момента времени её скорость будет больше 4?

- C2.** а) Касательные к графикам функций $f(x) = (5x + 2)e^{2x}$ и $g(x) = (17x - 4)e^{2x}$ параллельны, причём точки касания имеют общую абсциссу. Напишите уравнения этих касательных.
 б) Касательные к графикам функций $f(x) = (4x + 5)e^{3x}$ и $g(x) = (22x - 1)e^{3x}$ параллельны, причём точки касания имеют общую абсциссу. Напишите уравнения этих касательных.
- C3.** а) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 25^x + 8 \cdot 5^x$, перпендикулярных к прямой $y = -\frac{x}{9 \ln 5}$.
 б) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x) = \frac{7}{2} \cdot 49^x - 3 \cdot 7^x$, перпендикулярных к прямой $y = -\frac{x}{4 \ln 7}$.
- C4.** а) Найдите расстояние от начала координат до касательной к графику функции $f(x) = 4e^{x+4} - 3$, проходящей через точку $(-4; 1)$.
 б) Найдите расстояние от начала координат до касательной к графику функции $f(x) = 5e^{x+4} - 3$, проходящей через точку $(-4; 2)$.
- C5.** а) Найдите площадь треугольника, ограниченного осью абсцисс и двумя касательными к графику функции $f(x) = 2e^{x^2+4x}$, одна из которых проходит через точку $(0; 2)$, а другая — через точку $(-4; 2)$.
 б) Найдите площадь треугольника, ограниченного осью абсцисс и двумя касательными к графику функции $f(x) = 4e^{x^2+3x}$, одна из которых проходит через точку $(0; 4)$, а другая — через точку $(-3; 4)$.
- C6.** а) Через какую точку графика функции $f(x) = e^{3x+4}$ надо провести касательную, чтобы эта касательная проходила через начало координат?
 б) Через какую точку графика функции $f(x) = e^{4x+7}$ надо провести касательную, чтобы эта касательная проходила через начало координат?
- C7.** а) Найдите площадь треугольника, ограниченного осью ординат и касательными к графикам функций $f(x) = 7 \cdot 8^{x-3}$ и $g(x) = 8 \cdot 7^{x-3}$, проведёнными в точке пересечения графиков.

- б) Найдите площадь треугольника, ограниченного осью ординат и касательными к графикам функций $f(x) = 8 \cdot 9^{x-2}$ и $g(x) = 9 \cdot 8^{x-2}$, проведёнными в точке пересечения графиков.
- С8.** а) График первообразной для функции $f(x) = 16^x \ln 16 - 2 \cdot 4^x \ln 4$ пересекает ось ординат в точке $(0; -9)$. В какой точке он пересекает ось абсцисс?
- б) График первообразной для функции $f(x) = 25^x \ln 25 - 5^x \ln 5$ пересекает ось ординат в точке $(0; -20)$. В какой точке он пересекает ось абсцисс?
- С9.** а) Наименьшее значение первообразной для функции $f(x) = 7 \cdot 5^x \ln 5 + 4 \cdot 8^x \ln 8 + 3$ на отрезке $[0; 4]$ равно -6 . Найдите её наибольшее значение на этом отрезке.
- б) Наименьшее значение первообразной для функции $f(x) = 5 \cdot 2^x \ln 2 + 7 \cdot 7^x \ln 7 + 5$ на отрезке $[0; 2]$ равно -7 . Найдите её наибольшее значение на этом отрезке.
- С10.** а) Наибольшее значение первообразной для функции $f(x) = -7 - \frac{\ln 6}{6^x}$ на отрезке $[-2; -1]$ равно -7 . Найдите её наименьшее значение на этом отрезке.
- б) Наибольшее значение первообразной для функции $f(x) = -5 - \frac{\ln 3}{3^x}$ на отрезке $[-3; -2]$ равно -6 . Найдите её наименьшее значение на этом отрезке.

9.7. Логарифмическая функция

Уровень А

- А1.** Найдите:
- а) $f'(7)$, если $f(x) = 28 \ln x$; б) $f'(5)$, если $f(x) = 35 \ln x$.
- А2.** Найдите:
- а) $y'(-9)$, если $y(x) = 15 \ln(x + 12)$;
 б) $y'(-8)$, если $y(x) = 18 \ln(x + 11)$.
- А3.** Найдите:
- а) $f'(3)$, если $f(x) = \ln(6x - 5)$;
 б) $f'(5)$, если $f(x) = \ln(8x - 15)$.
- А4.** Найдите точку минимума функции:
- а) $f(x) = 5x - 2 \ln x + 3$; б) $f(x) = 2x - 5 \ln x + 4$.
- А5.** Найдите точку максимума функции:
- а) $f(x) = 7 \ln x - 6x - 5$; б) $f(x) = 9 \ln x - 8x - 7$.

- A6.** Найдите точку минимума функции:
 а) $f(x) = 0,7x - 7\ln(x - 4) - 21$;
 б) $f(x) = 0,9x - 9\ln(x - 3) - 22$.
- A7.** Найдите точку максимума функции:
 а) $f(x) = 3\ln(x + 2) - 0,6x + 11$;
 б) $f(x) = 2\ln(x + 3) - 0,4x + 9$.
- A8.** а) Прямая касается графика функции $y = \ln(x - 5) + \ln(x + 4)$ в точке с абсциссой 6. Найдите угловой коэффициент этой прямой.
 б) Прямая касается графика функции $y = \ln(x - 7) + \ln(x + 2)$ в точке с абсциссой 8. Найдите угловой коэффициент этой прямой.
- A9.** а) Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \ln(x - 10)$ равен 2. Найдите абсциссу точки касания.
 б) Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \ln(x - 8)$ равен 5. Найдите абсциссу точки касания.
- A10.** а) Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3,5x - \ln x^7 + 2$ равен 2. Найдите абсциссу точки касания.
 б) Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 1,25x - \ln x^5 + 3$ равен 5. Найдите абсциссу точки касания.

Уровень В

- B1.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln(x - 3) + 2$ в точке графика с абсциссой 4.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln(x + 6) - 3$ в точке графика с абсциссой -5 .
- B2.** Найдите значение функции $y(x)$ в нуле её производной, если:
 а) $y(x) = \frac{5x^2}{2} + \frac{4}{5}\ln\left(x + \frac{4}{5}\right) - 3$; б) $y(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln\left(x + \frac{4}{3}\right) - 2$.
- B3.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 1 - x - 3\ln(x - 1)$ в точке графика с абсциссой 2.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -1 - x + 4\ln(x + 3)$ в точке графика с абсциссой -2 .
- B4.** а) Касательная к графику функции $f(x) = -x + 5 + 3\ln(x + 2)$ параллельна оси абсцисс. Найдите абсциссу точки касания.
 б) Касательная к графику функции $f(x) = x + 4 - 5\ln(x + 5)$ параллельна оси абсцисс. Найдите абсциссу точки касания.

- B5.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $y(x) = x^2 + 6\sqrt{x+6} + 4\ln(x-2)$ в точке этого графика с абсциссой 3.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $y(x) = -3x^2 + 2\sqrt{x-1} - \ln(x-1)$ в точке этого графика с абсциссой 2.
- B6.** а) Касательная к графику функции $f(x) = 4x + 3 - \ln 2 \cdot \log_2(3x+1)$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол, тангенс которого равен 3. Найдите абсциссу точки касания.
 б) Тангенс угла между касательной к графику функции $f(x) = 3x - 2 - \ln 4 \cdot \log_4(3x+2)$ и положительным направлением оси абсцисс равен 2. Найдите абсциссу точки касания.
- B7.** а) Найдите производную функции $y(x) = \ln((3x-2)(4-x))$ в точке $x = 2$.
 б) Найдите производную функции $y(x) = \ln((3x-4)(10-3x))$ в точке $x = 3$.
- B8.** а) Касательная к графику функции $f(x) = -x - 3 + 5\ln(3x-4)$ параллельна прямой $y = 14x - 20$. Напишите уравнение касательной.
 б) Касательная к графику функции $f(x) = -x - 1 - 5\ln(2x+3)$ параллельна прямой $y = -11x - 22$. Напишите уравнение касательной.
- B9.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 7x + \ln(3x-2)$ в точке этого графика с абсциссой 1.
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x + \ln(4x+5)$ в точке этого графика с абсциссой -1.
- B10.** а) Сравните числа $F(1)$ и $F(7)$, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = -\log_5(5x+3)$.
 б) Сравните числа $F(3)$ и $F(9)$, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = -\log_9(4x-1)$.

Уровень С

- C1.** а) Касательные к графикам функций

$$f(x) = \ln 81 \cdot \log_3(3x-2) - 1 \text{ и } g(x) = \ln \frac{1}{125} \cdot \log_5(5-4x) + 2$$

параллельны, причём абсциссы точек касания одинаковы. Найдите расстояние между касательными.

б) Касательные к графикам функций

$$f(x) = \ln 64 \cdot \log_4(4x - 7) - 4 \text{ и } g(x) = \ln \frac{1}{16} \cdot \log_2(7 - 3x) - 3$$

параллельны, причём абсциссы точек касания одинаковы. Найдите расстояние между касательными.

С2. а) Прямая касается графика функции

$$f(x) = 16x^2 + 8x + \ln 10 \cdot \lg(4x + 3) - 3$$

в точке с абсциссой $-\frac{1}{2}$. Найдите расстояние от начала координат до этой прямой.

б) Прямая касается графика функции

$$f(x) = 25x^2 + 5x + \ln 10 \cdot \lg(5x + 3) + 3$$

в точке с абсциссой $-\frac{2}{5}$. Найдите расстояние от начала координат до этой прямой.

С3. а) Прямая касается графика функции $f(x) = \ln \frac{5x-12}{4x-15}$ в точке с абсциссой -3 . Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и этой прямой.

б) Прямая касается графика функции $f(x) = \ln \frac{5x+6}{2x+15}$ в точке с абсциссой 3 . Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и этой прямой.

С4. а) Прямая касается графика функции $f(x) = 5 - \frac{1}{2} \ln(4x + 5)^2$ в точке с абсциссой -1 . Найдите точки пересечения этой прямой с осями координат.

б) Прямая касается графика функции $f(x) = 3 - \frac{1}{2} \ln(2x - 1)^2$ в точке с абсциссой 1 . Найдите точки пересечения этой прямой с осями координат.

С5. Найдите значение производной функции:

а) $f(x) = \ln 5 \cdot \log_{14-3x} \frac{4x-7}{4-x}$ в точке $x = 3$;

б) $f(x) = \ln 5 \cdot \log_{40-7x} \frac{2x-5}{6-x}$ в точке $x = 5$.

С6. а) Функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными для функций $f(x) = (x + 5) \ln(7 - x)$ и $g(x) = (x - 2) \ln(x + 4)$ соответственно. Сравните $F(2)$ и $G(4)$, если $F(3) = G(3)$.

- б) Функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными для функций $f(x) = (x + 3)\ln(4 - x)$ и $g(x) = (x + 2)\ln(x + 6)$ соответственно. Сравните $F(2)$ и $G(4)$, если $F(3) = G(3)$.
- С7.** а) Прямая касается графика функции $f(x) = 9 - x + \ln(2x + 5)$ в точке с абсциссой -2 . Найдите углы треугольника, ограниченного осями координат и этой прямой.
 б) Прямая касается графика функции $f(x) = 4 - 5x + 3\ln(2x + 3)$ в точке с абсциссой -1 . Найдите углы треугольника, ограниченного осями координат и этой прямой.
- С8.** а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3 + \ln(4x + 21)$ в точке этого графика с ординатой 3 .
 б) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3 - 5\ln(3x + 4)$ в точке этого графика с ординатой 3 .
- С9.** а) Прямая касается графика функции $f(x) = 1 + \frac{7}{2}\ln(2x - 5)^2$ в точке с абсциссой 2 . Найдите точки пересечения этой прямой с осями координат.
 б) Прямая касается графика функции $f(x) = 7 + \frac{9}{2}\ln(3x + 5)^2$ в точке с абсциссой -2 . Найдите точки пересечения этой прямой с осями координат.
- С10.** а) Точки $K(3; 9)$ и $T(3; -1)$ лежат соответственно на графиках функций $y = F(x)$ и $y = G(x)$, являющихся первообразными для функции $f(x) = \sqrt{3x} + 3\ln(x - 2)$. Найдите расстояние между касательными к графикам, проведёнными в этих точках.
 б) Точки $K(2; -1)$ и $T(2; -21)$ лежат соответственно на графиках функций $y = F(x)$ и $y = G(x)$, являющихся первообразными для функции $f(x) = \sqrt{2x} + 7\ln(x - 1)$. Найдите расстояние между касательными к графикам, проведёнными в этих точках.

Глава 10. Уравнения и неравенства с параметром и нестандартные уравнения и неравенства

10.1. Логический перебор в задачах с параметром

Уровень С

- С1.** Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения:
- а) $9(5x - 1)a^2 - (59x - 55)a + 6(x - 1) = 0$;
 - б) $7(2x - 1)a^2 - (23x - 22)a + 3(x - 1) = 0$.
- С2.** Для каждого значения параметра a найдите множество решений неравенства:
- а) $4xa^2 - (17x + 4)a + 4x + 1 \geq 0$;
 - б) $5xa^2 - (26x + 1)a + 5x + 5 \leq 0$.
- С3.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|9x + 7a - 3| = |4x + 3a + 4|$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно -8 .
б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|7x + 8a - 5| = |9x + 7a - 2|$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 9 .
- С4.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение неравенство:
- а) $|3x - 5a - 3| \leq 7 - 5a - x$;
 - б) $|3x - 4a - 1| \leq 5 - 4a - x$.
- С5.** Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет не менее трёх решений система уравнений:
- а)
$$\begin{cases} (2a^2 - 11a)x - 25y = 2a^2 - 13a - 30, \\ 8x - 5y = 3; \end{cases}$$
 - б)
$$\begin{cases} (9a^2 - 49a)x + 36y = 9a^2 - 58a + 44, \\ 9y - 5x = 5. \end{cases}$$
- С6.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений:
- а)
$$\begin{cases} 12\cos^2 x + 11\cos^2 y + 33a = 31, \\ 33\cos^2 x + 4\cos^2 y + 151 = 198a; \end{cases}$$
 - б)
$$\begin{cases} 21\sin^2 x + 8\sin^2 y + 59 = 6a, \\ 24\sin^2 x + 7\sin^2 y + 91 = 9a. \end{cases}$$

- С7.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
- $$\begin{cases} 5^{x+2a} \leq 25^{x+a-4} \\ 6^{x-3a-3} \geq 36^{x+a-3} \end{cases}$$
- является отрезок числовой прямой, длина которого равна 3.
- б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
- $$\begin{cases} 7^{x+2a+1} \leq 49^{x+a+1} \\ 3^{x-a-2} \geq 9^{x+a+2} \end{cases}$$
- является отрезок числовой прямой, длина которого равна 1.
- С8.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение:
- а) $6 \log_7 \sin x + a \log_7 \sin x = a^2 + 5a + 4$;
 б) $\log_{0,5} \cos x + 7a = a \log_{0,25} \cos x + a^2 + 12$.
- С9.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два различных корня уравнение:
- а) $x^3 - (a-5)x^2 - 5ax = 0$; б) $x^3 + 2(a+3)x^2 + 12ax = 0$.
- С10.** При каждом значении параметра a решите неравенство:
- а) $\frac{3}{x-a} > a$; б) $\frac{1}{x-2a} > 2a$.
- С11.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений неравенства:
- а) $(x-3a+4)\sqrt{x+a+2} \leq 0$; б) $(x-2a+1)\sqrt{x+2a-1} \leq 0$
- является отрезок числовой прямой, длина которого равна $|a|$.
- С12.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственный корень уравнение:
- а) $(x-2a)\sqrt{x-5a+12} = 0$; б) $(x+4a)\sqrt{x-3a-7} = 0$.
- С13.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два различных корня уравнение:
- а) $(ax^2 - (a^2+8)x + 8a)\sqrt{x+3} = 0$;
 б) $(ax^2 - (a^2+6)x + 6a)\sqrt{x+5} = 0$.
- С14.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение неравенство:
- а) $(x-2a+1)\sqrt{x-3a} \leq 0$;
 б) $(x+3a+1)\sqrt{x+a} \leq 0$.

- C15.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно два корня уравнение:
- $(3\sin x - a - 1)(3\sin x + 2a - 1) = 0$;
 - $(9\sin x - a - 5)(9\sin x + 2a + 1) = 0$.
- C16.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых число $\frac{5\pi}{4}$ не является корнем уравнения
- $$\left(x - \frac{5\pi}{4}\right)(x - 10\pi)\sqrt{a^2 + 7a + 11 + \cos \frac{4x}{5}} = 0,$$
- а число 10π является корнем этого уравнения.
- б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых число $\frac{7\pi}{11}$ не является корнем уравнения
- $$\left(x - \frac{7\pi}{11}\right)(x - 14\pi)\sqrt{a^2 - 7a - 4 + 4\cos \frac{11x}{7}} = 0,$$
- а число 14π является корнем этого уравнения.
- C17.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет более двух корней уравнение:
- $\log_5(ax^2 - (a - 2)x + 7) + \log_{0,2}(7x^2 - (a - 2)x + a) = 0$;
 - $\log_{0,5}(ax^2 - (a - 3)x - 2) + \log_2(2x^2 - (a - 3)x - a) = 0$.

10.2. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах

Уровень С

- C1.** а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых больший корень уравнения $x^2 - (6a - 1)x + 9a^2 - 3a = 0$ в 9 раз больше, чем его меньший корень.
- б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых меньший корень уравнения $x^2 - (8a - 3)x + 16a^2 - 12a = 0$ в 10 раз меньше, чем его больший корень.
- C2.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два различных корня уравнение:
- $(ax^2 - (a^2 + 16)x + 16a)\sqrt{x + 5} = 0$;
 - $(ax^2 - (a^2 + 9)x + 9a)\sqrt{x + 4} = 0$.
- C3.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2(a^2 + 7a + 3)x + 9 = 0$ имеет два различных положительных корня.

- б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2(a^2 - 6a - 3)x + 16 = 0$ имеет два различных отрицательных корня.
- С4.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет два корня разных знаков уравнение:
- а) $ax^2 - (a + 1)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0$;
 б) $(a^2 - a - 2)x^2 - x + a^2 + a - 2 = 0$.
- С5.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение:
- а) $\cos^4 x - (a + 2)\cos^2 x - a - 3 = 0$;
 б) $\sin^4 x + (a - 6)\sin^2 x - 4a + 8 = 0$.
- Укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .
- С6.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственный корень уравнение:
- а) $16^x + (3a^2 + 5a + 7) \cdot 4^x - 2a + 3 = 0$;
 б) $49^x + (3a^2 - a + 3) \cdot 7^x - a - 2 = 0$.
- С7.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение неравенство:
- а) $a \log_3^2 x - (a - 2) \log_3 x - 2 \geq 0$;
 б) $a \log_5^2 x - (a + 3) \log_5 x + 3 \leq 0$.
- С8.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует единственная тройка $(x; y; z)$ действительных чисел x, y, z , удовлетворяющая системе уравнений:
- а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = x + y + z, \\ x + 2y + 3z = a. \end{cases}$
- С9.** Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y , для которых:
- а) $4x^2 + 2\cos^2 y + 4x\cos y - 4x + 2 = 0$;
 б) $4x^2 + 2\sin^2 y - 4x\sin y + 4x + 2 = 0$.
- С10.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет два корня разных знаков уравнение:
- а) $ax^2 - (a + 1)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0$;
 б) $(a^2 - a - 2)x^2 - x + a^2 + a - 2 = 0$.
- С11.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a^2 - a)x^2 - (a - 2)x - a - 6 = 0$ имеет два различных корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1.

- б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a^2 - a - 6)x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0$ имеет два различных корня, один из которых больше -1 , а другой меньше -1 .
- C12.** а) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - (2a - 5)x + a - 7 = 0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 3.
 б) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - (3a - 7)x + a - 4 = 0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 2.
- C13.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a + 1)x^2 + 2(a - 1)x - 2a + 1 = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 2.
 б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a + 2)x^2 - 2(a + 4)x - 2a + 7 = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 4.
- C14.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^4 + (a - 2)x^3 + 2x^2 + (a - 2)x + 2 = 0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней.
 б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^4 - (5a + 2)x^3 + 2x^2 - (5a + 2)x + 2 = 0$ имеет не менее двух различных положительных корней.
- C15.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство:
 а) $a(\cos^2 x - 3)^2 + 2a + 11\sin^2 x < 44$;
 б) $a(\sin^2 x - 3)^2 + 2a + 88 > 22\cos^2 x$.
- C16.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение неравенство:
 а) $9^x - (a - 1) \cdot 3^x - a + 4 \leq 0$;
 б) $49^x - (a + 1) \cdot 7^x - a + 2 \leq 0$.
- C17.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение:
 а) $\sqrt{2x - a + 5} = x - 2a + 4$;
 б) $\sqrt{2x - a - 4} = x - 2a - 2$.

Укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

10.3. Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств

Уровень С

- C1.** Решите уравнение:
а) $3^{-x} = \log_3(x + 11) + 7$;
б) $5^{-x} = \log_5(x + 6) + 4$.
- C2.** Решите неравенство:
а) $2\sqrt{x+3} > \log_7(5-x) + 1$; б) $\sqrt[3]{7-x^5} > \log_5(x+6) + 1$.
- C3.** Решите уравнение:
а) $4\sqrt{6-5x} + |3x-2| = 4x + |3\sqrt{6-5x} - 2|$;
б) $5\sqrt{12-x} + |4x-3| = 5x + |4\sqrt{12-x} - 3|$.
- C4.** Решите систему уравнений:
а)
$$\begin{cases} 3x^7 + 7\sin x + 3y^7 + 7\sin y = 0, \\ 3|x| + 7|y| = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 9x^5 + 2\sin x + 9y^5 + 2\sin y = 0, \\ 6|x| + 4|y| = 1. \end{cases}$$
- C5.** Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение:
а) $27x^6 + (3a - 4x)^3 + 3x^2 + 3a = 4x$;
б) $x^{10} + (a - 2x)^5 + x^2 + a = 2x$.
- C6.** Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение:
а) $\sin^{14}x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2x + a = 3\sin x$;
б) $\cos^{18}x + (5\cos x - a)^9 + \cos^2x + 5\cos x = a$.
- C7.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\|x + 2a| - 3a| + \|3x - a| + 4a| \leq 7x + 24$ выполняется для всех значений $x \in [0; 7]$.
б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\|x - 2a| + 3a| + \|3x + a| - 4a| \leq 5x + 24$ выполняется для всех значений $x \in [0; 6]$.
- C8.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство:
а) $|4\cos x + a + 6| + |5\cos x + a^2 + 1| \leq 10\cos x + |a^2 + a - 2| + 10$;
б) $|3\sin x + a^2 - 22| + |7\sin x + a + 12| \leq 11\sin x + |a^2 + a - 20| + 11$.

- С9.** Решите уравнение:
 а) $\sin^9 x + \cos^{11} x = 1$;
 б) $\sin^6 x + \cos^7 x = 1$.
- С10.** Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y , для каждой из которых:
 а) $3^{|x-2|+2} = 5\sin y + 4$;
 б) $5^{|y+3|+2} = 13 - 12\cos x$.
- С11.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение:
 а) $x + 2|x - 3| - 3|x - a - 4| = 7|x - a|$;
 б) $11|x + a| + 2x + 3|x - 5| = 5|x + a - 4|$.
- С12.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любой пары $(u; v)$ действительных чисел u и v выполнено неравенство:
 а) $13\sin u - 9|\sin u - v + 2a - 1| + 2|\sin u + 3v + 4a - 1| \leq 15$;
 б) $23\cos u - 17|\cos u + v - 3a - 1| + 4|\cos u - 3v + 7a - 1| \leq 31$.
- С13.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение:
 а) $a^2 + 8|x - 5| + 36\log_6(x^2 - 10x + 31) + 25 = 5x + 2|x - 6a - 5|$;
 б) $a^2 + 8|x - 5| + 9\log_3(x^2 - 10x + 28) + 25 = 5x + 2|x - 3a - 5|$.
- С14.** Найдите все значения параметра a , для каждого из которых единственный корень имеет уравнение:
 а) $x^2 + (a - 3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$;
 б) $x^2 + (a - 4)^2 = |x - a + 4| + |x + a - 4|$.
- С15.** Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет единственный корень уравнение:
 а) $a^2 + a\sqrt{3} + 6 + \sin^2 ax = 6\cos x$;
 б) $a^2 + a\sqrt{2} + 4 + \sin^2 ax = 4\cos x$.
- С16.** Найдите все пары $(a; b)$ действительных чисел a и b , для каждой из которых имеет единственный корень уравнение:
 а) $4\cos(2\pi x) + \cos(2b\pi x) = a$;
 б) $\cos(2\pi x) + 3\cos(2b\pi x) = a$.
- С17.** Найдите корни уравнения:
 а) $f(x) = 6$, если $x \neq 0$ и $3f\left(\frac{3}{x}\right) - f(x) = 8x$;
 б) $f(x) = -8$, если $x \neq 0$ и $4f\left(\frac{4}{x}\right) - f(x) = 15x$.

10.4. Графические интерпретации

Уровень С

- С1.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} a \leq x + 3, \\ a + 2x \geq 12, \\ 3a \geq x + 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2a + x \leq 15, \\ 3a \geq 2x + 5, \\ a \leq 3x + 18. \end{cases}$$

Укажите решения системы для каждого значения a .

- С2.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение неравенство:

$$\text{а) } \arcsin(ax + 2a + 1) + \arccos(2x + a + 3) \geq \frac{\pi}{2};$$
$$\text{б) } \arccos(ax - 2a + 1) + \arcsin(2x + a - 5) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Укажите решения неравенства для каждого значения a .

- С3.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 2a + 3x \leq 24, \\ 2a + 8x \geq x^2, \\ 2a \leq x; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} a + x \leq 12, \\ 9a + 12x \geq x^2, \\ 3a \leq x. \end{cases}$$

Укажите решения системы для каждого значения a .

- С4.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства:

$$\text{а) } x^2 + |x + a - 3| + 5 \leq 5x + a \text{ принадлежит отрезку } [1; 2];$$
$$\text{б) } 6x \geq 2x^2 + a + |2x - a - 2| + 2 \text{ принадлежит отрезку } [-1; 0].$$

- С5.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение неравенство:

$$\text{а) } (a + 4x - x^2)(a - x) \leq 0; \quad \text{б) } (a + 6x + x^2)(a + x) \leq 0.$$

Укажите решения неравенства для каждого значения a .

- С6.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} a \leq \sqrt{25 - x^2}, \\ (4a - 3x)(3a + 4x) \geq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} a + \sqrt{169 - x^2} \geq 0, \\ (5a - 12x)(12a + 5x) \leq 0. \end{cases}$$

Укажите решения системы для каждого значения a .

- С7.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} a \leq 3\log_3 x, \\ ax \geq 9, \\ |x - 9| + |x - 27| \leq 18 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 15.

- б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} a \leq \log_3 x, \\ ax \geq 3, \\ |x - 9| + |x - 27| \leq 18 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 9.

- С8.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых отрезок числовой прямой, длина которого равна 2, является множеством решений системы неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} a + 3x \leq 12, \\ a + 4x \geq x^2, \\ a \leq x; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} a + 6x \leq 24, \\ a + 8x \geq 2x^2, \\ a \leq 2x. \end{cases} \end{array}$$

- С9.** а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 - 8x + a \leq 0, \\ x^2 - 6x - a \leq 0 \end{cases}$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 6.

- б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 - 6x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - a \leq 0 \end{cases}$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 4.

- С10.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} a^2 + 6(2x + 3)a - 28x^2 + 108x + 81 \leq 0, \\ x^3 - 8x - a \leq 0; \end{cases} & \\ \text{б) } \begin{cases} a^2 + (7x + 8)a - 8x^2 + 28x + 16 \leq 0, \\ x^2 - 4x - a \leq 0. \end{cases} & \end{array}$$

C11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два различных решения неравенство:

а) $(x^2 - 4x)^2 - (a^2 - 3a)(x^2 - 4x) + a^3 - 4a^2 \leq 0$;

б) $(x^2 - 6x)^2 - (a^2 - 5a)(x^2 - 6x) + a^3 - 6a^2 \leq 0$.

C12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система неравенств:

а) $\begin{cases} |2a - 4x - 3| \geq 9, \\ x^2 + a \leq 4x + 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |a - 4x + 5| \geq 18, \\ x^2 + a \leq 8x + 9. \end{cases}$

C13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет нечётное число различных корней уравнение:

а) $ax = 12a + \sqrt{6|x| + 2x - x^2}$; б) $ax = 24a + \sqrt{12|x| + 4x - x^2}$.

C14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два различных решения система уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{x+4}} = 0, \\ y = ax; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax. \end{cases}$

C15. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных корня уравнение:

а) $12|x^2 - 4| = 2a + |a - 12x + 12| + 36$;

б) $6|x^2 - 4| = 2a + |a + 6x + 6| + 18$.

C16. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение:

а) $\frac{1}{2}ax + \left| \frac{1}{x} + 2 \right| = 2a$;

б) $\frac{1}{3}ax + \left| \frac{1}{x} + 1 \right| = a$.

Укажите число корней уравнения для каждого значения a .

C17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет более двух неотрицательных корней уравнение:

а) $a|x - 3| = \frac{5}{x+2}$;

б) $a|x - 6| = \frac{10}{x+4}$.

/ 10.5. Геометрические идеи

Уровень С

C1. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$(a - c)^2 + (b - d)^2$, если числа a, b, c, d таковы, что $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4, \\ c^2 + d^2 = 36. \end{cases}$

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a + u)^2 + (b + v)^2$, если числа a, b, u, v таковы, что $\begin{cases} a^2 + b^2 = 64, \\ u^2 + v^2 = 25. \end{cases}$

С2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y - 15)^2} + \sqrt{(x - 8)^2 + y^2} = 17, \\ \sqrt{x^2 + (y - 12)^2} + \sqrt{(x - 16)^2 + y^2} = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y - 8)^2} + \sqrt{(x - 6)^2 + y^2} = 10, \\ \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 12)^2} = 13. \end{cases}$

С3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x - 16 + 8y, \\ (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = a^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8x - 37 + 10y, \\ (x - 7)^2 + (y - 9)^2 = a^2. \end{cases}$

С4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений:

а) $\begin{cases} (x - 2a - 3)^2 + (y - 3a - 5)^2 = 100, \\ (x - 3a - 8)^2 + (y - 4a - 3)^2 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 5a - 6)^2 + (y - 4a + 5)^2 = 36, \\ (x - 6a - 5)^2 + (y - 5a + 8)^2 = 16. \end{cases}$

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + (y - 6)^2 = 36, \\ \sqrt{x^2 + (y - 18)^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 324}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + (y - 5)^2 = 25, \\ \sqrt{x^2 + (y - 15)^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 225}. \end{cases}$

С6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений:

а) $\begin{cases} (x + a - 8)^2 + (y - a)^2 = 32, \\ \sqrt{x^2 + (y - 8)^2} + \sqrt{(x - 8)^2 + y^2} = 8\sqrt{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x + a - 10)^2 + (y - a)^2 = 50, \\ \sqrt{x^2 + (y - 10)^2} + \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} = 10\sqrt{2}. \end{cases}$

С7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений:

а)
$$\begin{cases} y^2 - (2a + 1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x - a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 - (y - 3)^2} = 3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y^2 + (2a + 5)y + a^2 + 5a + 4 = 0, \\ \sqrt{(x + a)^2 + (y + 3)^2} + \sqrt{(x + a)^2 + y^2} = 3. \end{cases}$$

С8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений:

а)
$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25, \\ y = |x - a| + 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 2. \end{cases}$$

С9. Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений:

а)
$$\begin{cases} y = a|x| + a + 2, \\ x^2 + (y - a^2)^2 = 16; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y = a|x| + a + 1, \\ x^2 + (y + a^2)^2 = 9. \end{cases}$$

С10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$ система уравнений:

а)
$$\begin{cases} (x + \sqrt{25 - z})^2 + (y - \sqrt{z})^2 = 9, \\ a + x = y; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (x - \sqrt{z})^2 + (y - \sqrt{16 - z})^2 = 4, \\ x + y = a. \end{cases}$$

С11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два решения система неравенств:

а)
$$\begin{cases} 16y^2 \geq 9x^2, \\ (x - 6a + 1)^2 + y^2 \leq 9a^2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 9y^2 \geq 16x^2, \\ (x - 7a + 4)^2 + y^2 \leq 16a^2. \end{cases}$$

С12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет конечное число решений система неравенств:

а)
$$\begin{cases} (y - 3x)(3y - x) \leq 0, \\ (x - a)^2 + (y + a)^2 \leq 16a; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (y - 4x)(4y - x) \leq 0, \\ (x - a)^2 + (y + a)^2 \leq 25a. \end{cases}$$

С13. Найдите наименьшее значение параметра a , при котором имеет хотя бы один корень уравнение:

а)
$$\sqrt{(5x + 1)^2 + (5x + 2)^2} + \sqrt{(5x + 7)^2 + (5x - 6)^2} = a;$$

б)
$$\sqrt{(11x + 3)^2 + (11x + 7)^2} + \sqrt{(11x + 15)^2 + (11x + 2)^2} = a.$$

C14. Найдите наибольшее значение параметра a , при котором имеет хотя бы один корень уравнение:

а) $x(6\sqrt{64 - 49x^2} + 7\sqrt{25 - 36x^2}) = a$;

б) $x(4\sqrt{81 - 25x^2} + 5\sqrt{49 - 16x^2}) = a$.

C15. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ \sqrt{4x + 1} + \sqrt{4y + 1} + \sqrt{4z + 1} = \sqrt{21}; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ \sqrt{3x + 2} + \sqrt{3y + 2} + \sqrt{3z + 2} = 6. \end{cases}$$

C16. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 3} + \sqrt{50 - 3x} \leq 12$;

б) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x + 2} + \sqrt{17 - 4x} \leq 3\sqrt{6}$.

C17. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 9, \\ \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4y^2 + 1} + \sqrt{9z^2 + 1} = 6; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4, \\ \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2y^2 + 3} + \sqrt{3z^2 + 4} = 6. \end{cases}$$

10.6. Другие методы

Уровень С

C1. Найдите все значения x , при любом значении параметра a удовлетворяющие уравнению:

а) $2\log_{a^2+2}(4 - \sqrt{7 + 2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4 - 3x)$;

б) $2\log_{3a^2+2}(7 - \sqrt{34 + x}) = \log_{2a^2+3}(3 - x)$.

C2. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений:

а)
$$\begin{cases} (1 + 3x)^{2a} + (b^2 - 4b + 5)^y = 2, \\ x^2y^2 - (2 - b)xy + a^2 + 2a = 3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2(1 + |z|)^a + (b^2 - 2b + 2)^y = 3, \\ zy(y + b - 2) = 2a^2 - 7a + 3. \end{cases}$$

С3. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^b = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2^{bx} + (a + 1)by^2 = a^2, \\ (a - 1)x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

С4. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых при любом значении параметра b имеет ровно два корня уравнение:

$$\text{а) } x^2 - 4|x| - 7|a + b + 1| + 3|b - 1| - 2b - 5a - 14 = 0;$$

$$\text{б) } x^2 - 4|x| - 7|a + 2b - 1| + 3|2b + 3| - 4b + 5a - 20 = 0.$$

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство:

$$\text{а) } a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0;$$

$$\text{б) } 2a - 4 + a(3 - \sin^2 x)^2 + \cos^2 x < 0.$$

С6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любого значения x справедливо неравенство:

$$\text{а) } \log_{a+2} \frac{a+1}{a} (x^2 + 3) > 1; \quad \text{б) } \log_{a+1} \frac{a}{a+1} (x^2 + 2) > 1.$$

С7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых возрастает и не имеет критических точек на всей прямой функция:

$$\text{а) } y(x) = 8ax - a \sin 6x - 7x - \sin 5x;$$

$$\text{б) } y(x) = a \sin 7x + 8ax + \sin 4x - 5x.$$

С8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение:

$$\text{а) } x^3 - (a + 2)x^2 - 2ax + 4a^2 = 0;$$

$$\text{б) } 4x^3 - 2(a + 1)x^2 - ax + a^2 = 0.$$

Укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

С9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных корня уравнение:

$$\text{а) } x^4 - 6x^3 - 5ax^2 + 24ax + 4a^2 = 0;$$

$$\text{б) } x^4 - 8x^3 - 10ax^2 + 72ax + 9a^2 = 0.$$

С10. Найдите все целые значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один целый корень уравнение:

$$\text{а) } 10x^3 + x^2 - (2a + 21)x - 3a + 5 = 0;$$

$$\text{б) } 6x^3 + 25x^2 - (2a - 25)x - 5a + 7 = 0.$$

- C11.** Найдите все целые значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один целый корень уравнение:
- $6x^5 + 8x^4 + 13x^3 - 3ax^2 - 2(2a + 5)x - 2a - 13 = 0$;
 - $8x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 2(2a - 1)x^2 + 5(a + 1)x - 2a + 1 = 0$.
- C12.** а) Найдите все значения параметра a , при которых среди решений неравенства $(a - x^2)(a + x - 2) < 0$ нет ни одного решения неравенства $x^2 < 1$.
- б) Найдите все значения параметра a , при которых среди решений неравенства $(9a - 4x^2)(3a + 4x - 24) < 0$ нет ни одного решения неравенства $x^2 < 9$.
- C13.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение неравенство:
- $x^3 - 2(a + 4)x^2 + 12ax + 8a^2 \leq 0$;
 - $x^3 + 2(a + 6)x^2 + 28ax + 8a^2 \leq 0$.
- Укажите решения неравенства для каждого значения a .
- C14.** а) Числа x, y, z таковы, что $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 2$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $2x + y - 2z$?
- б) Числа a, b, c таковы, что $2a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a - 2b + c$?
- C15.** Решите уравнение:
- $|2x - \sqrt{1 - 4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1)$;
 - $|x + \sqrt{1 - x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1)$.
- C16.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение:
- $3x + \frac{5}{\sqrt{x^2 + 25}} = 0,2a\sqrt{x^2 + 25}$;
 - $5x + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0,5a\sqrt{x^2 + 4}$.
- C17.** а) Найдите наибольшее возможное значение выражения $x + 2y + 3z + 4t$, где $(x; y; z; t)$ — решение системы уравнений
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z^2 + t^2 = 4, \end{cases} \quad \text{такое, что } xt + yz \geq 2.$$
- б) Найдите наибольшее возможное значение выражения $4x + 3y + 2z + t$, где $(x; y; z; t)$ — решение системы уравнений
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z^2 + t^2 = 9, \end{cases} \quad \text{такое, что } xt + yz \geq 3.$$

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Числа и числовые выражения	5
1.1. Целые числа и степени с натуральным показателем	—
1.2. Дроби и степени с целым показателем	7
1.3. Корни и степени с дробным показателем	10
1.4. Тригонометрические выражения	13
1.5. Показательные выражения и степени с действительным показателем	16
1.6. Логарифмы и логарифмические выражения	19
Глава 2. Алгебраические выражения	22
2.1. Целые алгебраические выражения	—
2.2. Дробно-рациональные алгебраические выражения	25
2.3. Иррациональные алгебраические выражения	28
2.4. Тригонометрические выражения	32
2.5. Показательные выражения	35
2.6. Логарифмические выражения	38
Глава 3. Уравнения	42
3.1. Целые уравнения	—
3.2. Дробно-рациональные уравнения	44
3.3. Иррациональные уравнения	47
3.4. Тригонометрические уравнения	50
3.5. Показательные уравнения	53
3.6. Логарифмические уравнения	56
Глава 4. Системы уравнений	59
4.1. Системы целых уравнений	—
4.2. Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения	62
4.3. Системы, содержащие иррациональные уравнения	65
4.4. Системы, содержащие тригонометрические уравнения	69
4.5. Системы, содержащие показательные уравнения	72
4.6. Системы, содержащие логарифмические уравнения	75
Глава 5. Неравенства и системы неравенств	79
5.1. Целые неравенства и системы целых неравенств	—
5.2. Дробно-рациональные неравенства и системы, содержащие дробно-рациональные неравенства	82
5.3. Иррациональные неравенства и системы, содержащие иррациональные неравенства	86
5.4. Тригонометрические неравенства и системы, содержащие тригонометрические неравенства	88
5.5. Показательные неравенства и системы, содержащие показательные неравенства	91
5.6. Логарифмические неравенства и системы, содержащие логарифмические неравенства	93

Глава 6. Задачи с текстовым условием	97
6.1. Арифметические задачи с практическим содержанием	—
6.2. Задачи на оптимальный выбор	101
6.3. Задачи на движение	110
6.4. Задачи на производительность и работу	119
6.5. Задачи на проценты, части, доли	126
6.6. Задачи на свойства целых чисел	133
Глава 7. Представление данных, статистика, вероятность	146
7.1. Представление данных	—
7.2. Описательная статистика	150
7.3. Случайные опыты с равновероятными элементарными событиями	156
7.4. Операции над событиями. Дерево вероятностей. Независимость событий	158
7.5. Условная вероятность. Формула полной вероятности	162
7.6. Независимые испытания	166
Глава 8. Функции и графики	170
8.1. Чтение графиков реальных зависимостей	—
8.2. Целые рациональные функции	179
8.3. Дробно-рациональные функции	181
8.4. Иррациональные функции	183
8.5. Тригонометрические функции	184
8.6. Показательная функция	187
8.7. Логарифмическая функция	188
Глава 9. Начала математического анализа. Исследование функций	191
9.1. Графические интерпретации	—
9.2. Целые рациональные функции	195
9.3. Дробно-рациональные функции	199
9.4. Иррациональные функции	204
9.5. Тригонометрические функции	209
9.6. Показательная функция	214
9.7. Логарифмическая функция	218
Глава 10. Уравнения и неравенства с параметром и нестандартные уравнения и неравенства	223
10.1. Логический перебор в задачах с параметром	—
10.2. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах	225
10.3. Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств	228
10.4. Графические интерпретации	230
10.5. Геометрические идеи	232
10.6. Другие методы	235



Учебное издание

**Яценко Иван Валериевич
Шестаков Сергей Алексеевич**

**Алгебра и начала математического анализа
Универсальный многоуровневый сборник задач
10—11 классы**

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Редакция математики и информатики
Заведующий редакцией *Е. В. Эргле*
Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*
Редакторы *Т. Г. Войлокова, П. А. Бессарабова*
Младшие редакторы *Е. А. Андрееenkova, Е. В. Трошко*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Дизайн *Ю. В. Тигиной, О. Г. Чичвариной*
Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской*
Компьютерная вёрстка
и техническое редактирование *О. С. Ивановой*
Корректоры *О. Н. Леонова, М. А. Павлушкина*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 04.06.19. Формат
70×90¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 10,98. Тираж 1500 экз. Заказ № 4237ТДЛ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников —
электронная почта «Горячей линии» — fru@prosv.ru.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд»
в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
Российская Федерация, 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.



- Содержит задачи по всем темам курса алгебры и начал математического анализа трёх уровней сложности
- Поможет организовать повторение и дифференцированную работу на уроках и факультативных занятиях
- Поможет при подготовке к итоговой аттестации по математике
- Поможет при подготовке к участию в международных сравнительных исследованиях качества образования

Полный ассортимент продукции издательства «Просвещение» вы можете приобрести в официальном интернет-магазине **shop.prosv.ru**:

- низкие цены;
- оперативная доставка по всей России;
- защита от подделок;
- привилегии постоянным покупателям;
- разнообразные акции в течение всего года.

ISBN 978-5-09-072795-2



9 785090 727952


ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

www.prosv.ru

