

**И. В. Ященко
С. А. Шестаков**

ГЕОМЕТРИЯ

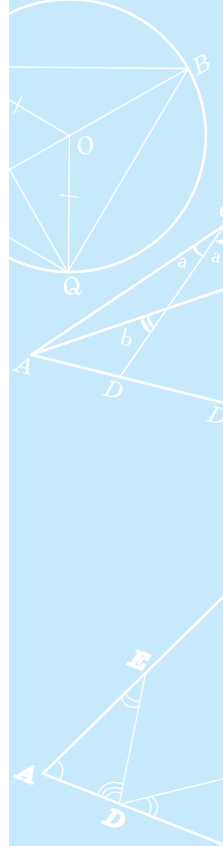
**Универсальный
многоуровневый
сборник задач**

10–11 классы

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

3-е издание

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2021



УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
Я97

12+

Яценко И. В.
Я97 Геометрия. Универсальный многоуровневый сборник задач.
10—11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций /
И. В. Яценко, С. А. Шестаков. — 3-е изд. — М. : Просвещение,
2021. — 239 с. : ил. — ISBN 978-5-09-078551-8.

Учебное пособие содержит задачи по курсу геометрии для 10—11 классов трёх уровней сложности в соответствии с концепцией математического образования. Задания уровня *А* можно использовать для отработки базовых математических навыков. Задания уровня *В* будут полезны учащимся, стремящимся продолжить образование в технических и экономических вузах (а также вузах со схожими требованиями к математической подготовке абитуриентов). Задания уровня *С* предназначены для учащихся, планирующих продолжить своё образование в вузах с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Книга будет полезна учащимся и учителям при подготовке к участию в международных сравнительных исследованиях качества образования, итоговой аттестации по математике, организации повторения и дифференцированной работы на уроках и факультативах.

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-09-078551-8

© Издательство «Просвещение», 2019
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2019
Все права защищены

Предисловие

Учебное пособие представляет собой универсальный многоуровневый сборник задач по геометрии для 10—11 классов.

Все задачи распределены по двум крупным тематическим разделам: «Планиметрия» и «Стереометрия», каждый из которых разбит на три главы. В разделе «Планиметрия» это главы «Отрезки, углы, треугольники», «Многоугольники», «Окружности», а в разделе «Стереометрия» это главы «Прямые, плоскости, призмы», «Пирамиды», «Тела вращения». Такая структура позволяет использовать задачник в качестве дополнения при работе с любым учебно-методическим комплектом, рекомендованным для средней школы, вне зависимости от порядка прохождения тем. Она является иерархической, т. е. задачи главы с бóльшим номером включают в себя и задачи на комбинации фигур, указанных в названии главы, и фигур из предыдущих глав. Поэтому задачи по теме «Вписанная окружность треугольника» находятся в главе «Окружности», а не в главе «Отрезки, углы, треугольники». Такой порядок в целом соответствует последовательности изучения материала в средней школе и представляется целесообразным.

Данный задачник трёхуровневый. Распределение по уровням сделано в соответствии с Концепцией развития математического образования в Российской Федерации:

- уровень А* — математика для жизни и базовые математические навыки;
- уровень В* — математика для продолжения образования в технических, экономических и схожих по уровню требований вузах;
- уровень С* — творческая математика для продолжения образования в вузах с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Разумеется, распределение по уровням имеет в определённой степени условный характер.

Так как по окончании старшей школы каждый выпускник проходит аттестацию в форме ЕГЭ (базового или профильного уровней), на которой предлагаются задания по всему курсу школьной математики, то в данный сборник с целью придания ему большей универсальности включены и задания по тематике основной школы (раздел «Планиметрия»).

При составлении задачника авторы попытались обеспечить преемственность между традиционными для российского математического образования задачами и теми заданиями, которые вошли в практику массовой школы в последние годы через системы аттестаций и мониторингов разного рода и уровня (ОГЭ, ЕГЭ, PISA и многих других).

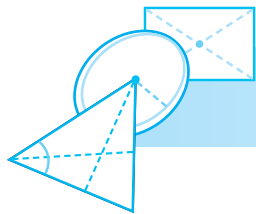
Для удобства использования в урочной деятельности каждая задача представлена в двух равноценных вариантах *а)* и *б)*.

Ответы к заданиям учебного пособия можно найти на сайте www.prosv.ru.

Пособие может использоваться как самостоятельное издание в качестве дополнения к учебно-методическому комплекту «Я сдам ЕГЭ! Математика» или любому другому учебно-методическому комплекту в урочной и внеурочной деятельности, при проведении факультативных занятий и элективных курсов, а также для самостоятельного освоения учащимися методов решения геометрических задач разного типа и уровня сложности.

В работе над книгой самое деятельное и непосредственное участие принимал И. Р. Высоцкий, которого по праву можно считать одним из соавторов пособия.

Авторы выражают признательность и благодарность за неоценимую помощь в подготовке рукописи данного пособия Ю. Березуцкой, О. Виноградовой, О. Ворончагиной, В. Кисловской, А. Кострикиной, Д. Мануйлову, К. Спириной, А. Тюриной, Ю. Цимбалову и другим сотрудникам Московского центра непрерывного математического образования.



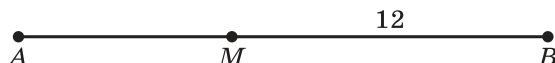
Планиметрия

Глава 1. Отрезки, углы, треугольники

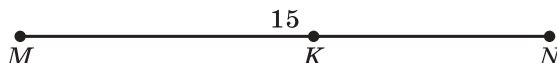
1.1. Отрезки и углы

Уровень А

- A1.** а) Точка M лежит на отрезке AB , $AM : MB = 3 : 4$, $MB = 12$.
Найдите длину отрезка AB .

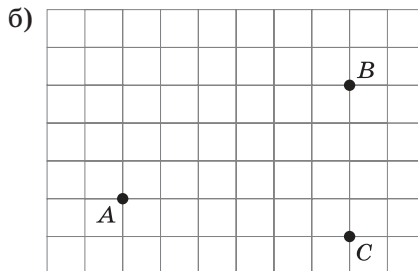
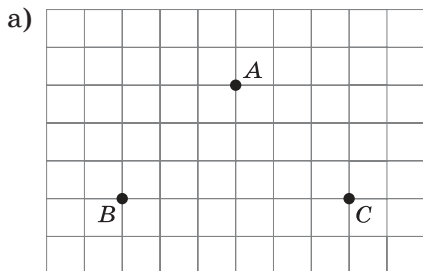


- б) Точка K лежит на отрезке MN , $KN : MN = 2 : 5$, $MN = 15$.
Найдите длину отрезка KN .

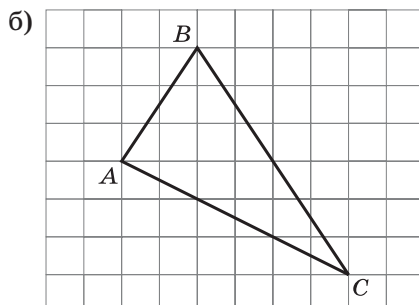
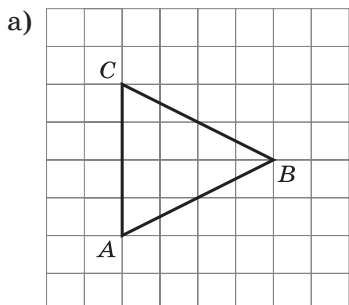


- A2.** а) Точка A делит отрезок MN в отношении $2 : 7$, считая от точки M , $MN = 27$. Найдите длину отрезка AN .
б) Точка K лежит на отрезке AB , $KB : AB = 5 : 6$, $AB = 18$. Найдите длину отрезка AK .

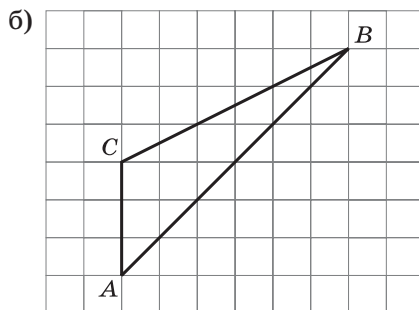
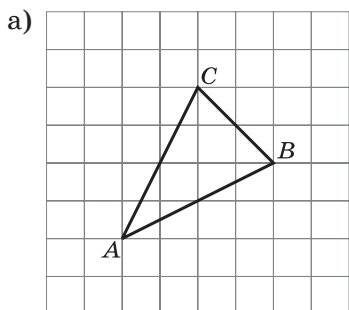
- A3.** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены три точки: A , B и C . Найдите расстояние от точки A до прямой BC .



A4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите его биссектрису, проведённую из вершины B .



A5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите его медиану, проведённую из вершины C .

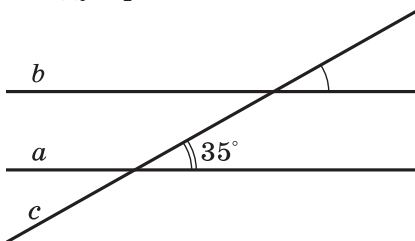


A6. а) Угол между прямыми a и b равен 17° , а угол между прямыми a и c равен 33° . Найдите угол между прямыми b и c , если известно, что он меньше 33° .

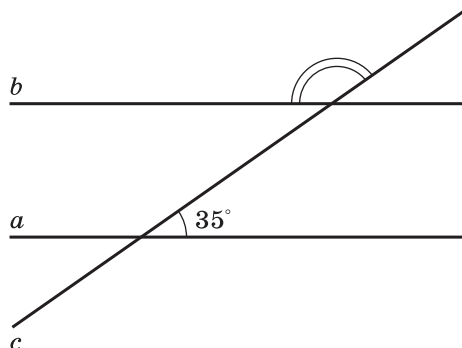
б) Угол между прямыми a и b равен 45° , а угол между прямыми a и c равен 30° . Найдите угол между прямыми b и c , если известно, что он больше 45° .

A7. Прямая b параллельна прямой a , прямая c пересекает прямую a и угол между прямыми a и c составляет 35° .

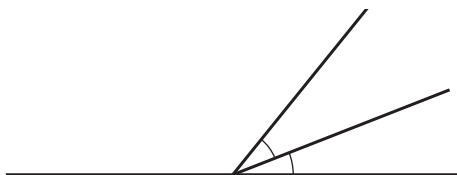
а) Найдите угол между прямыми c и b .



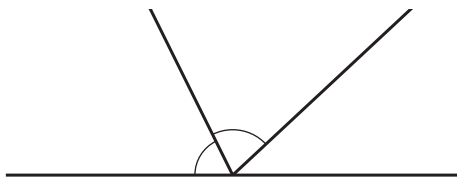
б) Найдите угол, смежный углу между прямыми c и b .



A8. а) Даны два смежных угла, один из которых равен 134° . Найдите угол между биссектрисой второго из данных углов и их общей стороной.



б) Даны два смежных угла, один из которых равен 36° . Найдите угол между биссектрисой второго из данных углов и их общей стороной.



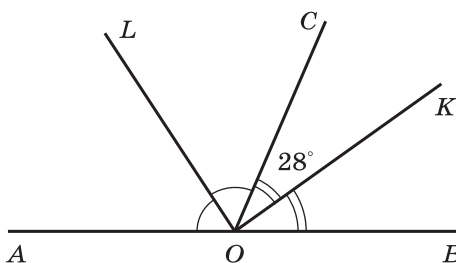
A9. а) Даны два смежных угла. Биссектриса одного из них образует угол 24° с общей стороной этих углов. Найдите величину второго из данных смежных углов.

б) Даны два смежных угла. Биссектриса одного из них образует угол 45° с общей стороной этих углов. Найдите величину второго из данных смежных углов.

A10. Углы AOC и COB смежные. LO и KO — биссектрисы углов AOC и COB соответственно. Угол KOC равен 28° .

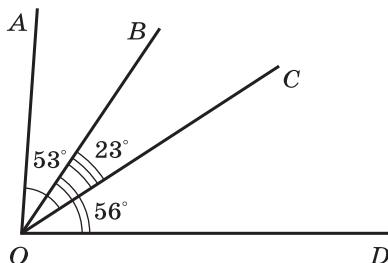
а) Докажите, что сумма углов LOC и KOC равна 90° .

б) Найдите угол AOC .



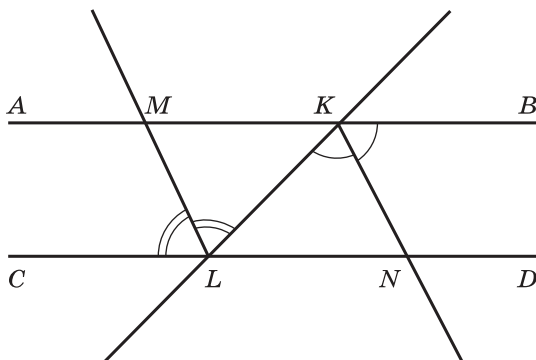
A11. Из точки O выходит четыре луча — OA , OB , OC и OD . Углы AOC , BOC и BOD равны 53° , 23° и 56° соответственно.

- Найдите угол COD .
- Найдите угол AOD .



A12. Прямая KL пересекает две параллельные прямые AB и CD , LM и KN — биссектрисы углов CLK и LKB соответственно.

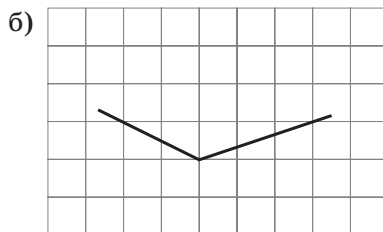
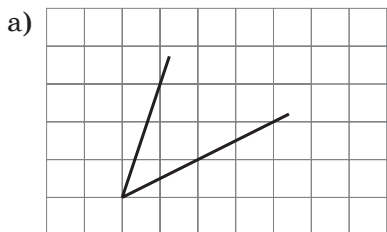
- Докажите, что прямые LM и KN параллельны.
- Докажите, что углы KML и KNL равны.



Уровень В

- Точки K и L лежат на отрезке AB , причём $LB : AL = 4 : 7$, а $AL = 14$. Найдите длину отрезка AB .
 - Точки P и R лежат на отрезке AB , причём $PR : RB = 2 : 1$, $AR : PR = 5 : 4$, а $AP = 3$. Найдите длину отрезка RB .
- Точка C принадлежит отрезку AB , причём $AC : CB = 5 : 14$. Точка D принадлежит отрезку CB , причём $CD : DB = 3 : 4$. Найдите отношение $AD : DB$.
 - Точка C принадлежит отрезку AB , причём $AC : CB = 10 : 7$. Точка D принадлежит отрезку AC , причём $AD : DC = 2 : 3$. Найдите отношение $AD : DB$.

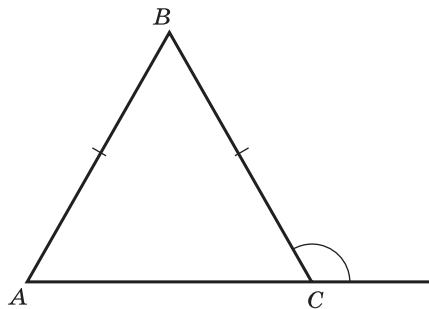
- В3.** а) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите длину отрезка MC , если $AB = 14$, $DC = 42$, $AC = 56$.
- б) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите длину отрезка MC , если $AB = 17$, $DC = 51$, $AC = 64$.
- В4.** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



1.2. Равносторонний и равнобедренный треугольники

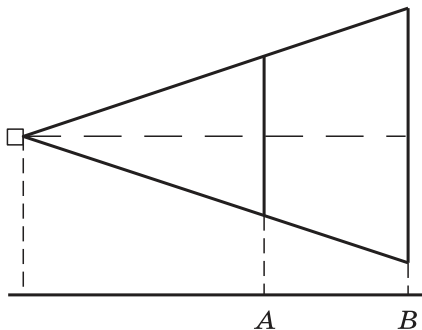
Уровень А

- A1.** а) Найдите угол B равнобедренного треугольника ABC , если $AB = BC$, а внешний угол при вершине C равен 124° .
- б) Найдите угол B равнобедренного треугольника ABC , если $AB = BC$, а внешний угол при вершине C равен 123° .



- A2.** а) Найдите внешний угол при вершине A треугольника ABC , если $AC = BC$, а угол ACB равен 48° .
- б) Найдите внешний угол при вершине A треугольника ABC , если $AC = BC$, а угол ACB равен 128° .

- A3.** а) Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите его высоту.
 б) Высота равностороннего треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найдите его сторону.
- A4.** а) Найдите среднюю линию равностороннего треугольника, если его периметр равен 126.
 б) Найдите высоту равностороннего треугольника, если его периметр равен $42\sqrt{3}$.
- A5.** Треугольник ABC — равносторонний. Известно, что высота AH равна 6.
 а) Найдите медиану BM .
 б) Найдите биссектрису CK .
- A6.** Треугольник ABC — равносторонний.
 а) Найдите угол между высотой AH и медианой BM .
 б) Найдите угол между биссектрисой CK и высотой AH .
- A7.** а) Проектор полностью освещает экран A высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. Найдите, на каком наименьшем расстоянии от проектора нужно расположить экран B высотой 160 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными. Ответ дайте в сантиметрах.



- б) Проектор полностью освещает экран A высотой 90 см, расположенный на расстоянии 300 см от проектора. Найдите, на каком наименьшем расстоянии от проектора нужно расположить экран B высотой 180 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными. Ответ дайте в сантиметрах.

- A8.** а) Найдите высоту равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 30, а основание равно 36.
б) Найдите высоту равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 25, а основание равно 40.
- A9.** а) Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его высота равна 30, а основание равно 32.
б) Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его высота равна 40, а основание равно 60.
- A10.** а) Сторона равностороннего треугольника равна 5. Найдите площадь этого треугольника.
б) Высота равностороннего треугольника равна 3. Найдите площадь этого треугольника.
- A11.** а) Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, равна 6, а боковые стороны равны 10. Найдите площадь треугольника.
б) Основание равнобедренного треугольника равно 24, а его боковые стороны равны 13. Найдите площадь треугольника.
- A12.** а) Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{3}{7}$, а его боковая сторона равна 14. Найдите площадь треугольника.
б) Синус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{2}{5}$, а его высота равна 6. Найдите площадь треугольника.

Уровень В

- B1.** а) Найдите основание равнобедренного треугольника, если его высоты равны 3, 3 и 6.
а) Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его высоты равны 4, 4 и 10.
- B2.** а) Расстояние от точки пересечения биссектрис равнобедренного треугольника до его основания равно 3 см, а до вершины, противоположной этому основанию, — 5 см. Найдите площадь треугольника.

б) Расстояние от точки пересечения биссектрис равнобедренного треугольника до его основания равно 4 см, а до вершины, противолежащей этому основанию, — 5 см. Найдите площадь треугольника.

В3. а) Серединные перпендикуляры к боковым сторонам равнобедренного треугольника пересекаются в середине его основания. Найдите площадь треугольника, если длина его боковой стороны равна 5 см.

б) Серединные перпендикуляры к боковым сторонам равнобедренного треугольника пересекаются в середине его основания. Найдите площадь треугольника, если сумма длин его боковых сторон равна 6 см.

Уровень С

С1. а) Найдите углы треугольника ABC , если из следующих четырёх утверждений о нём три истинны, а одно ложно:

- 1) треугольник ABC — равнобедренный;
- 2) треугольник ABC — прямоугольный;
- 3) сумма двух любых углов треугольника ABC меньше 132° ;
- 4) один из углов треугольника ABC равен 80° .

б) Найдите углы треугольника ABC , если из следующих четырёх утверждений о нём три истинны, а одно ложно:

- 1) треугольник ABC — равнобедренный;
- 2) треугольник ABC — прямоугольный;
- 3) сумма двух любых углов треугольника ABC меньше 126° ;
- 4) один из углов треугольника ABC равен 70° .

С2. а) Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону AB . Расстояния от вершин A и B до этой прямой равны соответственно 1 и 7. Найдите сторону треугольника ABC .

б) Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая продолжение стороны AB за точку A . Расстояния от вершин A и B до этой прямой равны соответственно 2 и 5. Найдите сторону треугольника ABC .

С3. а) Точка M выбрана на боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC так, что $AM = 3$. Найдите BM , если $AB = AC = 9$, $BC = 6$.

б) Точка M выбрана на боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC так, что $AM = 4$. Найдите BM , если $AB = AC = 16$, $BC = 8$.

С4. а) Биссектриса угла C равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AB в точке D . Площади треугольников ACD и BCD равны соответственно 4 и 2,5. Найдите длину основания AC треугольника ABC .

б) Биссектриса угла C равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AB в точке D . Площади треугольников ACD и BCD равны соответственно 12 и 6,5. Найдите длину основания AC треугольника ABC .

1.3. Прямоугольный треугольник

Уровень А

A1. а) Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 34° . Найдите его другой острый угол.

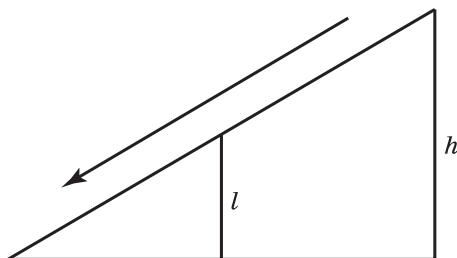
б) Внешний угол острого угла прямоугольного треугольника равен 137° . Найдите другой его острый угол.

A2. а) В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 37° . Найдите больший из углов, на которые высота, проведённая к гипотенузе, делит прямой угол.

б) В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 58° . Найдите меньший угол данного треугольника.

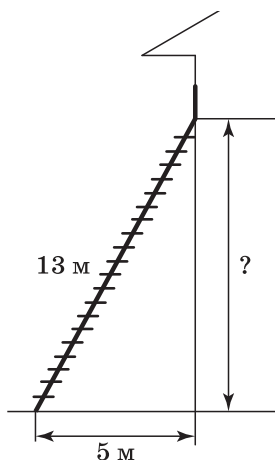
A3. а) Столб подпирает детскую горку посередине. Найдите высоту l столба, если высота h горки равна 3.

б) Столб подпирает детскую горку посередине. Найдите высоту l столба, если высота h горки равна 3,7.

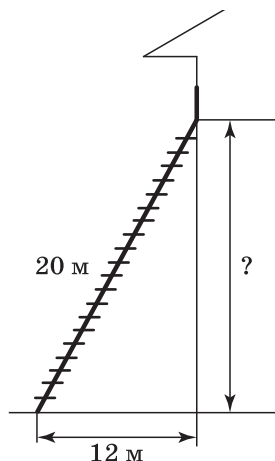


- А4.** а) Пожарную лестницу длиной 13 м приставили к окну пятого этажа дома. Нижний конец лестницы отстоит от стены на 5 м. На какой высоте расположено окно? Ответ дайте в метрах.

а)



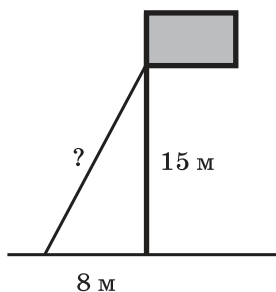
б)



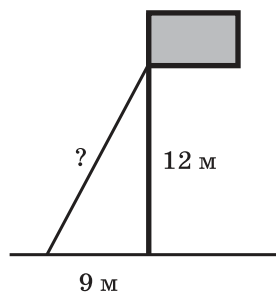
- б) Пожарную лестницу длиной 20 м приставили к окну пятого этажа дома. Нижний конец лестницы отстоит от стены на 12 м. На какой высоте расположено окно? Ответ дайте в метрах.

- А5.** а) Точка крепления троса, удерживающего флагшток в вертикальном положении, находится на высоте 15 м от земли. Расстояние от основания флагштока до места крепления троса на земле равно 8 м. Найдите длину троса. Ответ дайте в метрах.

а)



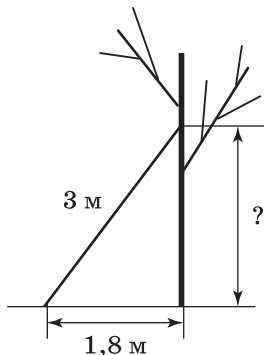
б)



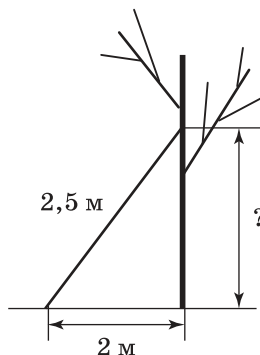
- б) Точка крепления троса, удерживающего флагшток в вертикальном положении, находится на высоте 12 м от земли. Расстояние от основания флагштока до места крепления троса на земле равно 9 м. Найдите длину троса. Ответ дайте в метрах.

- A6.** а) Лестницу длиной 3 м прислонили к дереву. Найдите высоту, на которой находится верхний конец этой лестницы, если её нижний конец отстоит от ствола дерева на 1,8 м. Ответ дайте в метрах.

а)



б)



- б) Лестницу длиной 2,5 м прислонили к дереву. Найдите высоту, на которой находится верхний конец этой лестницы, если её нижний конец отстоит от ствола дерева на 2 м. Ответ дайте в метрах.

- A7.** а) Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найдите его гипотенузу.
б) Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 8 и 17 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.
- A8.** а) Найдите медиану прямоугольного треугольника, проведённую к гипотенузе, если гипотенуза равна 54.
б) Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если медиана, проведённая к гипотенузе, равна 32.
- A9.** а) Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите наибольшую среднюю линию треугольника.
б) Катеты прямоугольного треугольника равны 10 и 24. Найдите наибольшую среднюю линию треугольника.
- A10.** а) В прямоугольном треугольнике, один из углов которого равен 60° , гипотенуза равна 48. Найдите наименьший катет.
б) В прямоугольном треугольнике, один из углов которого равен 30° , меньший катет равен 27. Найдите гипотенузу.

- A11.** а) В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, гипотенуза AB равна 5, косинус угла B равен $\frac{3}{5}$. Найдите сторону AC .
 б) В прямоугольном треугольнике ABC угол A — прямой, тангенс угла C равен $\frac{3}{4}$, сторона AC равна 8. Найдите гипотенузу BC .
- A12.** а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 12, а другой катет равен 16.
 б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 15, а гипотенуза равна 17.
- A13.** а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 16, а гипотенуза равна 34.
 б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 28, а гипотенуза равна 35.
- A14.** а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна $\sqrt{13}$, а один из катетов равен 2.
 б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна $\sqrt{17}$, а один из катетов равен 1.
- A15.** а) В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} B = \frac{7}{24}$, $BC = 48$. Найдите площадь треугольника.
 б) В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} B = \frac{8}{15}$, $BC = 30$. Найдите площадь треугольника.
- A16.** а) В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 2\sqrt{5}$, $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Найдите площадь треугольника.
 б) В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 5\sqrt{17}$, $\sin A = \frac{1}{\sqrt{17}}$. Найдите площадь треугольника.

Уровень В

- B1.** а) Катеты прямоугольного треугольника равны 18 и 24. Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе.
 б) Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 24 и 26. Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе.
- B2.** а) Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите катет AB , если $AH = 6$, $AC = 24$.

б) Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите длину высоты BH , если $AH = 28$, $CH = 7$.

В3. а) Длина катета прямоугольного треугольника равна 8 см, а длина медианы, проведённой к этому катету, равна $4\sqrt{10}$ см. Найдите длину медианы, проведённой к другому катету этого треугольника.

б) Длина катета прямоугольного треугольника равна 6 см, а длина медианы, проведённой к этому катету, равна $\sqrt{73}$ см. Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе этого треугольника.

В4. а) Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит его гипотенузу в отношении $4:3$. Найдите площадь треугольника, если длина медианы, проведённой к гипотенузе, равна 5 см.

б) Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит его гипотенузу в отношении $12:5$. Найдите площадь треугольника, если длина медианы, проведённой к гипотенузе, равна 13 см.

Уровень С

С1. а) Катеты AB и BC прямоугольного треугольника ABC равны 7 и 10 соответственно. Расстояние от точки M до катета AB равно 5, а до катета BC равно 4. Где расположена точка M — внутри треугольника ABC , на гипотенузе AC или вне треугольника? Ответ обоснуйте.

б) Катеты AB и BC прямоугольного треугольника ABC равны 6 и 13 соответственно. Расстояние от точки M до катета BC равно 3, а до катета AB равно 6. Где расположена точка M — внутри треугольника ABC , на гипотенузе AC или вне треугольника? Ответ обоснуйте.

С2. а) Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны 32 и 8 соответственно. Расстояния от точки M до катетов AC и BC равны соответственно 3 и 20. В каком отношении, считая от вершины A , прямая CM делит гипотенузу треугольника?

- б) Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны 24 и 6 соответственно. Расстояния от точки M до катетов AC и BC равны 5 и 4 соответственно. В каком отношении, считая от вершины A , прямая CM делит гипотенузу треугольника?
- С3.** а) Гипотенуза BC прямоугольного треугольника ABC равна 25. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой из вершины C , если $AC = 1$.
- б) Гипотенуза BC прямоугольного треугольника ABC равна 24. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой из вершины B , если $AB = 3$.
- С4.** а) Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины B к гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC . Найдите периметр треугольника ABC , если $AH = 6$, $BC = 4$.
- б) Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины B к гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC . Найдите периметр треугольника ABC , если $CH = 8$, $AB = 3$.
- С5.** а) Биссектриса прямого угла A прямоугольного треугольника ABC делит медиану, проведённую из вершины B , в отношении $4 : 3$, считая от вершины B . Найдите площадь треугольника, если $BC = 2\sqrt{3}$.
- б) Биссектриса острого угла B прямоугольного треугольника ABC делит медиану, проведённую из вершины острого угла C , в отношении $8 : 3$, считая от вершины C . Найдите площадь треугольника, если $AC = 2\sqrt{7}$.

1.4. Произвольный треугольник

Уровень А

- A1.** а) В треугольнике два угла равны 57° и 86° . Найдите его третий угол.
- б) В треугольнике один угол равен 46° , а разность двух других углов равна 36° . Найдите больший угол этого треугольника.
- A2.** а) В треугольнике ABC известно, что угол BAC равен 82° , AD — биссектриса. Найдите угол BAD .
- б) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD , угол BAD равен 31° . Также известно, что угол ABC равен 46° . Найдите угол BCA .

- A3.** а) В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 28$, а синус угла A равен $\frac{4}{5}$. Найдите гипотенузу AB .
 б) В треугольнике ABC угол A равен 90° , $AC = 15$, а косинус угла C равен $\frac{5}{13}$. Найдите гипотенузу BC .
- A4.** а) В треугольнике ABC углы A и B равны 51° и 62° соответственно. Найдите угол между высотой CH и стороной CB .
 б) В треугольнике ABC углы A и C равны 32° и 97° соответственно. Найдите угол между высотой CH и стороной CB .
- A5.** а) В треугольнике ABC углы A и B равны 31° и 45° соответственно. Найдите внешний угол при вершине C .
 б) В треугольнике ABC углы A и B равны 48° и 76° соответственно. Найдите внешний угол при вершине C .
- A6.** а) В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 9$. Запишите углы A , B и C в порядке их возрастания.
 б) В треугольнике ABC $AB = 11$, $BC = 10$, $AC = 13$. Запишите углы A , B и C в порядке их убывания.
- A7.** а) В треугольнике ABC $\angle A = 47^\circ$, $\angle B = 46^\circ$, $\angle C = 87^\circ$. Запишите стороны AB , BC и AC в порядке их убывания.
 б) В треугольнике ABC $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 65^\circ$, $\angle C = 80^\circ$. Запишите стороны AB , BC и AC в порядке их возрастания.
- A8.** а) Могут ли точки A , B и C быть вершинами треугольника, если $AB = 13$, $AC = 5$, $BC = 8$? Ответ обоснуйте.
 б) Могут ли точки A , B и C быть вершинами треугольника, если $AB = 9$, $AC = 4$, $BC = 6$? Ответ обоснуйте.
- A9.** а) Какую наибольшую целую длину может иметь сторона AC треугольника ABC , если $AB = 10$, а $BC = 7$?
 б) Какую наименьшую целую длину может иметь сторона AC треугольника ABC , если $AB = 7$, а $BC = 13$?
- A10.** а) Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину стороны AC , если $CM = 14$, $CN = 18$, $BC = 27$.
 б) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка BM , если $AB = 24$, $BN = 21$, $BC = 28$.

A11. а) Прямые, содержащие отрезки AB и DC , параллельны, а отрезки AC и BD пересекаются в точке O . Найдите длину отрезка AO , если $CO = 36$, $DC = 30$, $AB = 25$.

б) Прямые, содержащие отрезки AD и BC параллельны, а отрезки AC и BD пересекаются в точке O . Найдите длину отрезка BC , если $AD = 32$, $DO = 20$, $BO = 15$.

A12. а) В треугольнике ABC сторона AC равна 14, медиана BM равна 10. Найдите длину отрезка AM .

б) В треугольнике ABC проведена медиана AM , $MC = 8$, $AM = 10$. Найдите длину стороны BC .

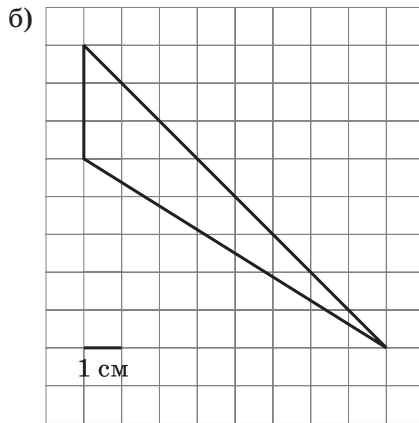
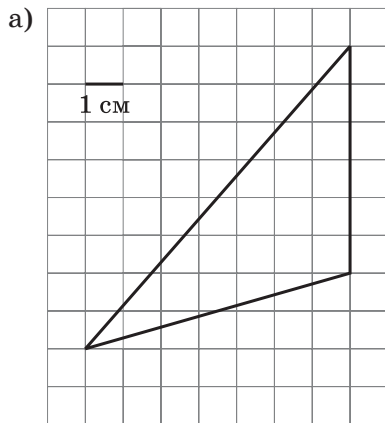
A13. а) На стороне AC треугольника ABC взята точка M , причём $AM : MC = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника ABM равна 48.

б) На стороне AC треугольника ABC взята точка M , причём $AM : MC = 2 : 7$. Найдите площадь треугольника MBC , если площадь треугольника ABC равна 72.

A14. а) Найдите площадь треугольника, если высота, проведённая к одной из его сторон, равна 25, а средняя линия, параллельная этой стороне, равна 11.

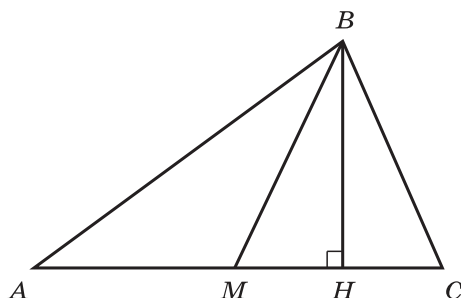
б) Найдите площадь треугольника, если высота, проведённая к одной из его сторон, равна 21, а средняя линия, параллельная этой стороне, равна 13.

A15. На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображён треугольник. Найдите его площадь.



Уровень В

- В1.** а) В треугольнике ABC известно, что $BC = \sqrt{7}$, $AC = 3\sqrt{7}$, внешний угол при вершине C равен 120° . Найдите длину стороны AB .
- б) В треугольнике ABC известно, что $BC = 4\sqrt{3}$, $AC = 8\sqrt{3}$, внешний угол при вершине C равен 120° . Найдите длину стороны AB .
- В2.** а) В треугольнике ABC сторона $AC = 13$, BM — медиана, BH — высота, $BC = BM$. Найдите длину отрезка AH .



- б) В треугольнике ABC сторона $AC = 59$, BM — медиана, BH — высота, $BC = BM$. Найдите длину отрезка AH .
- В3.** а) В треугольнике ABC известно, что $BC = 12$, $\sin A = \frac{2}{3}$, внешний угол при вершине C равен 150° . Найдите длину стороны AB .
- б) В треугольнике ABC известно, что $BC = 21$, $\sin A = \frac{1}{4}$, внешний угол при вершине C равен 150° . Найдите длину стороны AB .
- В4.** а) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите длину отрезка KM , если $BK : KA = 2 : 5$, $AC = 21$.
- б) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите длину стороны AC , если $BK : KA = 3 : 4$, $KM = 18$.

- В5.** а) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка BN , если $MN = 18$, $AC = 54$, $NC = 32$.
- б) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину стороны BC , если $MN = 13$, $AC = 52$, $NC = 36$.
- В6.** а) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что угол BMN равен углу BCA . Найдите длину отрезка MN , если $AC = 48$, $AB = 42$, $BN = 28$.
- б) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что угол BMN равен углу BCA . Найдите длину отрезка BN , если $MN = 27$, $AB = 52$, $AC = 36$.
- В7.** а) Вершины K и P треугольников AKB и APB лежат по одну сторону от прямой AB . Прямая PK пересекает прямую AB в точке M . Найдите, в каком отношении, считая от точки M , точка K делит отрезок PM , если площадь треугольника AKB относится к площади треугольника APB как $2 : 5$.
- б) Вершины K и P треугольников AKB и APB лежат по одну сторону от прямой AB . Прямая PK пересекает прямую AB в точке M . Найдите, в каком отношении, считая от точки M , точка K делит отрезок PM , если площадь треугольника AKB относится к площади треугольника APB как $3 : 4$.
- В8.** а) Стороны AB и BC треугольника ABC равны 32 и 24 соответственно, а высота, проведённая к стороне BC , равна 16. Найдите высоту, проведённую к стороне AB .
- б) Высоты треугольника ABC , проведённые к сторонам AB и AC , равны 9 и 12 соответственно. Найдите длину стороны AC , если $AB = 24$.
- В9.** а) Углы A и B треугольника ABC равны 45° и 120° соответственно. Найдите длину стороны AC , если $BC = 12$.

- б) Углы B и C треугольника ABC равны 135° и 30° соответственно. Найдите длину стороны AC , если $AB = 21\sqrt{2}$.
- В10.** а) Найдите косинус меньшего из углов треугольника со сторонами 12, 14 и 18.
 б) Найдите косинус большего из углов треугольника со сторонами 9, 15 и 21.
- В11.** а) В треугольнике ABC углы A и B равны 64° и 24° соответственно. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины C .
 б) В треугольнике ABC углы A и B равны 48° и 76° соответственно. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины C .
- В12.** а) Найдите тангенс меньшего из углов треугольника, если стороны треугольника равны 10, 24 и 26.
 б) Найдите косинус меньшего из углов треугольника, если стороны треугольника равны 12, 16 и 20.
- В13.** а) В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответственно, так что $BM : AB = 1 : 2$, а $BK : BC = 4 : 5$. Найдите, во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника MBK .
 б) В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответственно, так что $BM : AB = 1 : 2$, а $BK : BC = 10 : 13$. Найдите, во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника MBK .
- В14.** а) В треугольнике ABC проведена медиана BM . На стороне AB взята точка K так, что $AK = \frac{1}{3}AB$. Площадь треугольника AMK равна 5. Найдите площадь треугольника ABC .
 б) В треугольнике ABC проведена медиана BM . На стороне AB взята точка K так, что $AK = \frac{1}{7}AB$. Площадь треугольника AMK равна 2. Найдите площадь треугольника ABC .
- В15.** а) Средняя линия MN треугольника ABC отсекает от него треугольник MBN , площадь которого равна 32. Найдите площадь треугольника ABC .

б) Средняя линия MN треугольника ABC отсекает от него треугольник MCN . Найдите площадь треугольника MCN , если площадь треугольника ABC равна 76.

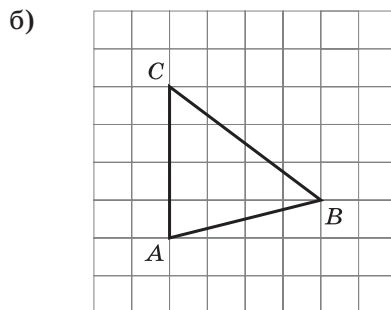
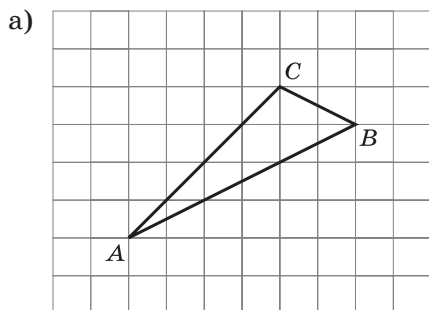
В16. а) Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC , а точка K делит отрезок BM в отношении $BK : KM = 7 : 5$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCK$, если площадь треугольника AKC равна 48.

б) Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC , а точка K делит отрезок BM в отношении $BK : KM = 4 : 9$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCK$, если площадь треугольника ABC равна 39.

В17. а) На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбраны точки M , K и P соответственно, так что $AM : MB = 2 : 1$, $BK : KC = 3 : 2$, $CP : PA = 3 : 1$. Найдите площадь треугольника MPK , если площадь треугольника ABC равна 90.

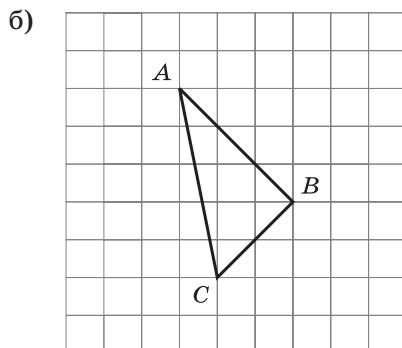
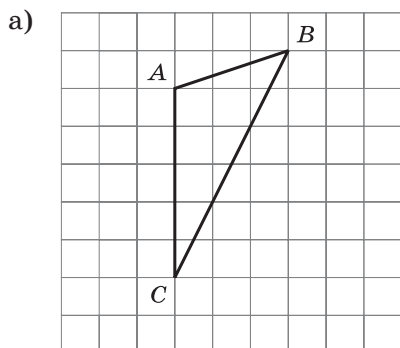
б) На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбраны точки M , K и P соответственно, так что $AM : MB = 1 : 2$, $BK : KC = 2 : 3$, $CP : PA = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника MPK , если площадь треугольника ABC равна 60.

В18. а) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину биссектрисы, проведённой к стороне AC .



б) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину высоты, проведённой к стороне AB .

В19. а) На клетчатой бумаге изображён треугольник. Найдите сумму углов A и C этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



б) На клетчатой бумаге изображён треугольник ABC . Найдите величину его наибольшего угла. Ответ дайте в градусах.

Уровень С

- С1.** а) Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке M , а прямые, содержащие высоты треугольника, проведённые из тех же вершин, пересекаются в точке P . Найдите угол BAC , если угол BPC на 21° больше угла BMC .
- б) Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке K , а прямые, содержащие высоты треугольника, проведённые из тех же вершин, пересекаются в точке H . Найдите угол ACB , если угол AHB на 18° меньше угла AKB .
- С2.** а) Стороны AB , BC и AC треугольника ABC равны 16, 17 и 22 соответственно. Где расположено основание высоты треугольника, проведённой из вершины A : на стороне BC , на её продолжении за точку B или на её продолжении за точку C ? Ответ обоснуйте.
- б) Стороны AB , BC и AC треугольника ABC равны 18, 19 и 26 соответственно. Где расположено основание высоты треугольника, проведённой из вершины B : на стороне AC , на её продолжении за точку A или на её продолжении за точку C ? Ответ обоснуйте.
- С3.** а) В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 16. Найдите стороны треугольника ABC .

- б) В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 44. Найдите стороны треугольника ABC .
- С4. а) Медианы треугольника ABC , проведённые из вершин B и C , пересекаются под прямым углом. Найдите длину медианы треугольника, проведённой из вершины A , если $BC = 42$.
- б) Медианы треугольника ABC , проведённые из вершин B и C , пересекаются под прямым углом. Найдите длину медианы треугольника, проведённой из вершины A , если $BC = 38$.
- С5. а) Биссектриса угла A треугольника ABC делит медиану, проведённую из вершины B , в отношении $5 : 4$, считая от вершины B . В каком отношении, считая от вершины C , эта биссектриса делит медиану, проведённую из вершины C ?
- б) Биссектриса угла B треугольника ABC делит медиану, проведённую из вершины C , в отношении $7 : 2$, считая от вершины C . В каком отношении, считая от вершины A , эта биссектриса делит медиану, проведённую из вершины A ?
- С6. а) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 6$, $BC = 8$, а длина медианы, проведённой из вершины B , равна 5.
- б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 10$, $BC = 24$, а длина медианы, проведённой из вершины B , равна 13.
- С7. а) Точка пересечения биссектрис треугольника ABC делит биссектрису угла BAC в отношении $4 : 1$, считая от вершины A . Найдите периметр треугольника ABC , если $BC = 7$.
- б) Точка пересечения биссектрис треугольника ABC делит биссектрису угла BAC в отношении $5 : 2$, считая от вершины A . Найдите периметр треугольника ABC , если $BC = 8$.
- С8. а) Расстояния от вершин B и C треугольника ABC до прямой, содержащей биссектрису угла BAC , равны 4 и 3 соответственно. Найдите длины сторон AB и AC , если $BC = 14$.
- б) Расстояния от вершин B и C треугольника ABC до прямой, содержащей биссектрису угла BAC , равны 5 и 4 соответственно. Найдите длины сторон AB и AC , если $BC = 18$.
- С9. а) Точки K и P являются основаниями высот остроугольного треугольника ABC , проведённых из вершин A и B соответ-

ственно. Найдите угол ACB , если площадь треугольника $СКР$ вчетверо меньше площади треугольника ABC .

б) Точки K и P являются основаниями высот остроугольного треугольника ABC , проведённых из вершин A и B соответственно. Найдите угол ACB , если площадь треугольника $СКР$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

C10. а) Точки K и P являются основаниями высот остроугольного треугольника ABC , проведённых из вершин A и B соответственно, точка M — середина стороны AB . Найдите периметр треугольника $МКР$, если косинус угла ACB равен $\frac{3}{4}$, $AB = 16$.

б) Точки K и P являются основаниями высот остроугольного треугольника ABC , проведённых из вершин A и B соответственно, точка M — середина стороны AB . Найдите периметр треугольника $МКР$, если косинус угла ACB равен $\frac{2}{5}$, $AB = 20$.

C11. а) Точка P выбрана на стороне AC треугольника ABC так, что углы CBP и CAB равны. Найдите отношение площади треугольника CBP к площади треугольника ABP , если $AC : BC = 5 : 4$.

б) Точка P выбрана на стороне AC треугольника ABC так, что углы CBP и CAB равны. Найдите отношение $AP : PC$, если $AC : BC = 6 : 5$.

C12. а) Прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках P и M соответственно. Найдите отношение площади треугольника APM к площади четырёхугольника $MCBP$, если $AP : PB = 5 : 4$, $AM : MC = 3 : 5$.

б) Прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках P и M соответственно. Найдите отношение площади треугольника APM к площади четырёхугольника $MCBP$, если $AP : PB = 2 : 5$, $AM : MC = 1 : 4$.

C13. а) Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

б) Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K . Длина стороны AC втрое больше длины стороны AB . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC .

- С14.** а) Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC .
- б) Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника BKP к площади треугольника AKM .
- С15.** а) Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K . Длина стороны AC втрое больше длины стороны AB . Найдите отношение площади четырёхугольника $KPCM$ к площади треугольника ABC .
- б) Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K . Длина стороны AC втрое больше длины стороны AB . Найдите отношение площади треугольника BKP к площади треугольника AKM .
- С16.** а) Стороны AB и AC треугольника ABC равны 6 и $3\sqrt{5}$ соответственно. Найдите площадь треугольника, если биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении $3 : 2$, считая от вершины B .
- б) Стороны AB и AC треугольника ABC равны 8 и $4\sqrt{15}$ соответственно. Найдите площадь треугольника, если биссектриса угла B делит высоту, проведённую из вершины A , в отношении $4 : 1$, считая от вершины A .
- С17.** а) На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C взята точка A_1 , на продолжении стороны AC за точку A — точка B_1 , на продолжении стороны AB за точку B — точка C_1 . Найдите отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC , если $A_1C : CB = B_1A : AC = C_1B : BA = 2 : 3$.
- б) На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C взята точка A_1 , на продолжении стороны AC за точку A — точка B_1 , на продолжении стороны AB за точку B — точка C_1 . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, если $A_1C : CB = B_1A : AC = C_1B : BA = 3 : 2$.
- С18.** а) Высоты AP и BM остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Найдите площадь четырёхугольника $MCPH$, если $BM : AP = 8 : 7$, а площади треугольников AMH и BPH равны 3 и 12 соответственно.

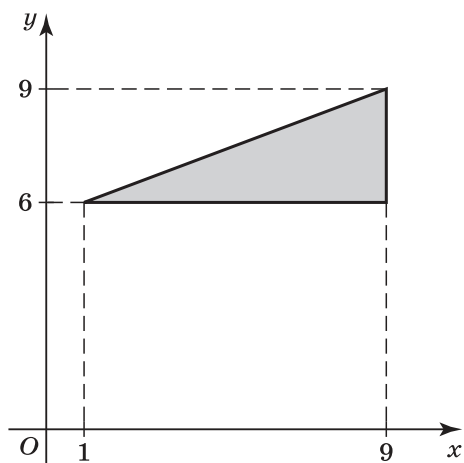
б) Высоты AP и BM остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Найдите площадь четырёхугольника $MCPH$, если $BM : AP = 3 : 2$, а площади треугольников AMH и BRH равны 4 и 16 соответственно.

1.5. Координаты и векторы

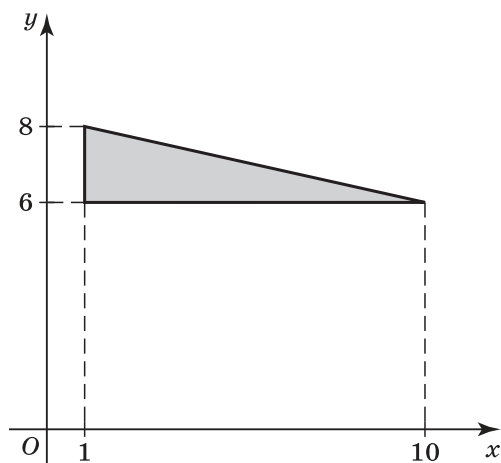
Уровень А

A1. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.

а)

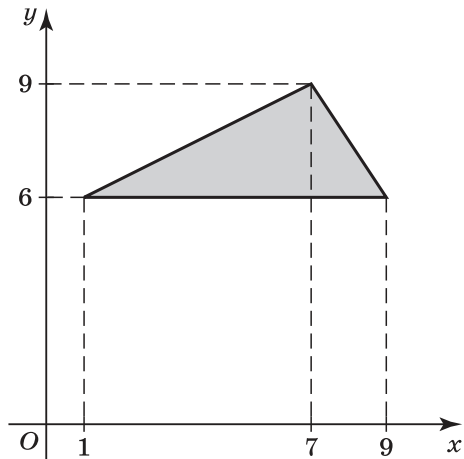


б)

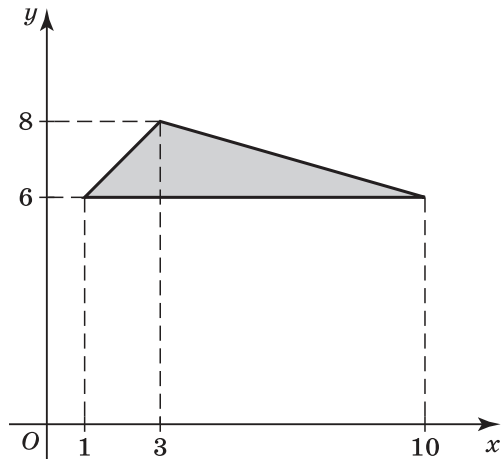


A2. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.

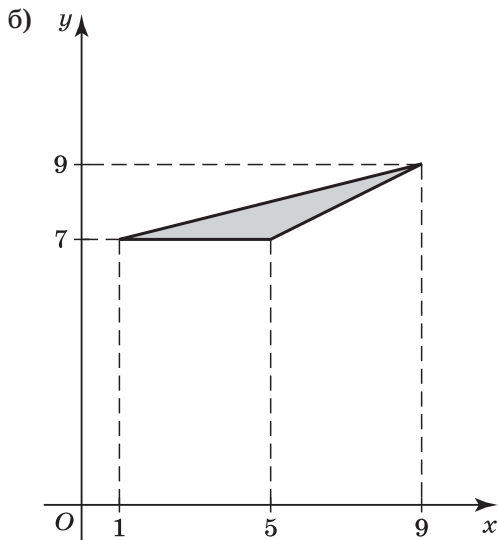
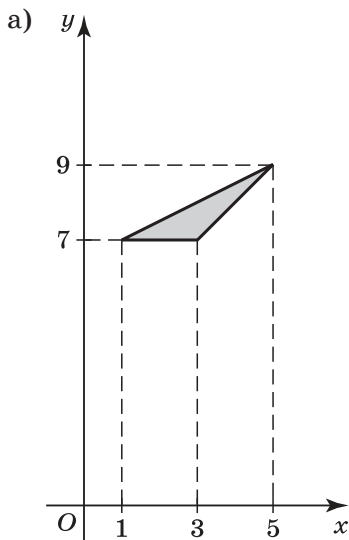
а)



б)



А3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



А4. а) Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $\overrightarrow{AB} \{3; -4\}$.

б) Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $\overrightarrow{AB} \{5; 12\}$.

А5. а) Дан вектор $\vec{a} \{3; -2\}$. Найдите координаты вектора $2\vec{a}$.

б) Дан вектор $\vec{b} \{-3; 1,5\}$. Найдите координаты вектора $-2\vec{b}$.

А6. а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-4; 2)$, $B(1; -3)$.

б) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(3; -2)$, $B(5; -1)$.

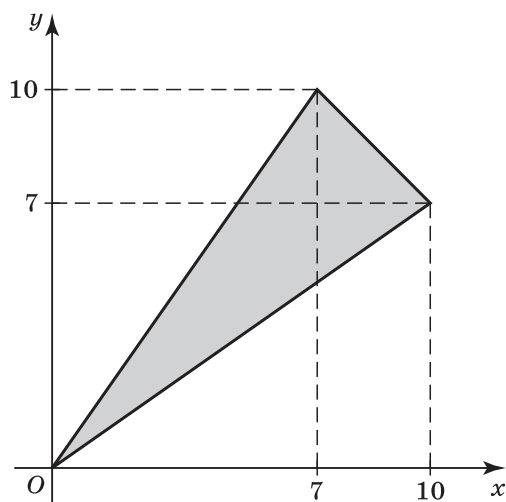
А7. а) Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если заданы координаты векторов $\vec{a} \{-3; 5\}$ и $\vec{b} = \{0; -1\}$.

б) Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если заданы координаты векторов $\vec{a} \{5; 3\}$ и $\vec{b} = \{-2; -3\}$.

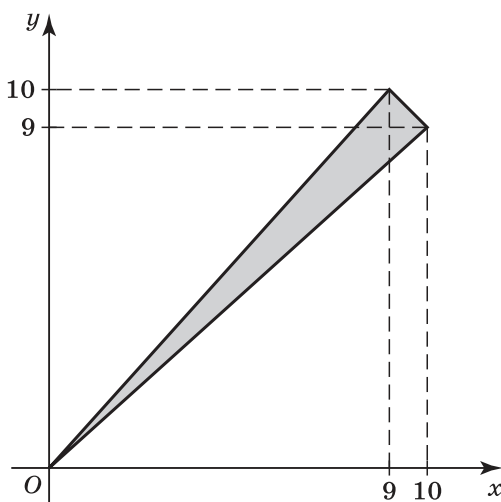
Уровень В

В1. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.

а)



б)



В2. а) На продолжении отрезка AB за точку B выбрана точка M так, что $AB : BM = 5 : 3$. Найдите координаты точки M , если известны координаты точек A и B : $A(-2; 3)$, $B(3; 8)$.

б) Точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = 3 : 4$. Найдите координаты точки M , если известны координаты точек A и B : $A(4; 3)$, $B(11; 10)$.

В3. а) Найдите длину медианы BM треугольника ABC , если известны координаты вершин треугольника: $A(2; 5)$, $B(0; 0)$, $C(4; 3)$.

б) Найдите длину медианы CP треугольника ABC , если известны координаты вершин треугольника: $A(-3; -2)$, $B(-6; 2)$, $C(0; 0)$.

В4. а) Найдите площадь треугольника ABC , если известны координаты его вершин $A(-3; -2)$, $B(-1; -7)$, $C(5; -2)$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если известны координаты его вершин $A(-2; -3)$, $B(4; 2)$, $C(-2; 5)$.

Уровень С

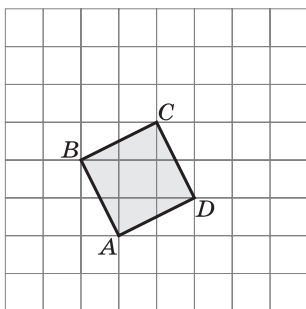
- С1.** а) Точка M делит гипотенузу AC прямоугольного треугольника ABC в отношении $AM : MC = 2 : 3$. Запишите разложение вектора $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ и длину вектора $\overrightarrow{BM}$, если $AB = 10$, $CB = 5$.
- б) Точка M делит гипотенузу AC прямоугольного треугольника ABC в отношении $AM : MC = 3 : 5$. Запишите разложение вектора $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ и длину вектора $\overrightarrow{BM}$, если $AB = 16$, $CB = 8$.
- С2.** Найдите координаты точки, симметричной точке $A(10; 10)$ относительно прямой:
- а) $y = \frac{1}{2}x$; б) $y = 2x$.
- С3.** а) Найдите координаты точки на оси ординат, сумма расстояний от которой до точек $A(4; 4)$ и $B(6; -4)$ минимальна.
- б) Найдите координаты точки на оси абсцисс, сумма расстояний от которой до точек $A(-3; 2)$ и $B(2; 6)$ минимальна.

2.1. Параллелограммы

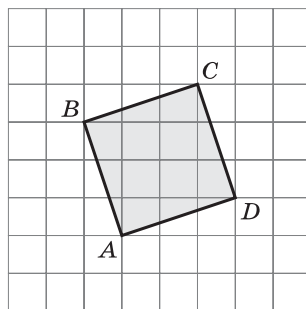
Уровень А

- A1.** Найдите площадь квадрата, сторона которого равна:
- а) $2\sqrt{7}$; б) $3\sqrt{2}$.
- A2.** а) Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 288.
 б) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 14.
- A3.** Найдите площадь квадрата, если его периметр равен:
- а) 12; б) 160.
- A4.** Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 .

а)

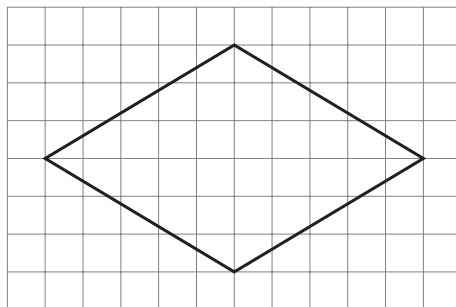
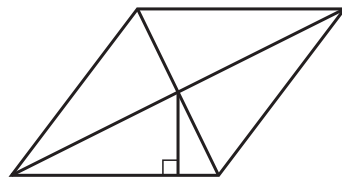


б)

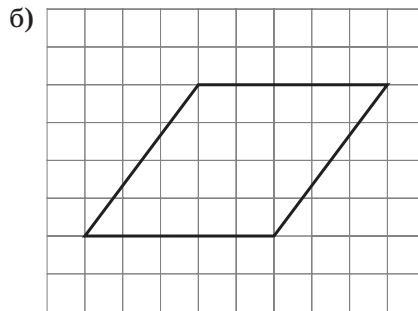
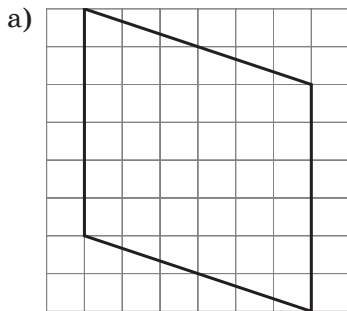


- A5.** а) Сторона квадрата равна целому числу сантиметров. Докажите, что площадь квадрата равна 100 см^2 , если из двух следующих утверждений истинным является только одно:
- 1) периметр квадрата меньше 38 см;
 - 2) периметр квадрата меньше 44 см;
- б) Сторона квадрата равна целому числу сантиметров. Докажите, что площадь квадрата равна 100 см^2 , если из двух следующих утверждений истинным является только одно:
- 1) периметр квадрата больше 37 см;
 - 2) периметр квадрата больше 43 см.
- A6.** Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали прямоугольника, если диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол, равный:
- а) 7° ; б) 13° .

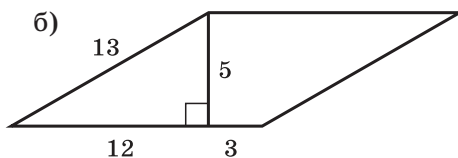
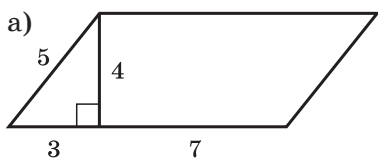
- A7.** Найдите площадь прямоугольника, если расстояния от точки пересечения диагоналей прямоугольника до двух его сторон равны:
а) 6 и 9; б) 8 и 11.
- A8.** Найдите сторону ромба, если периметр этого ромба:
а) на 36 больше его стороны;
б) на 42 больше его стороны.
- A9.** Найдите сторону ромба, если она:
а) на 36 меньше его периметра;
б) на 24 меньше его периметра.
- A10.** Найдите сторону ромба, если его диагонали равны:
а) 12 и 16; б) 10 и 24.
- A11.** Найдите углы ромба, если угол между высотами ромба, проведёнными из вершины тупого угла, равен:
а) 23° ; б) 32° .
- A12.** Найдите площадь ромба, если его диагонали равны:
а) 14 и 6; б) 21 и 4.
- A13.** а) Сторона ромба равна 9, а расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до этой стороны равно 1. Найдите площадь ромба.
б) Сторона ромба равна 7, а расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до этой стороны равно 2. Найдите площадь ромба.
- A14.** а) Периметр ромба равен 24, а один из его углов равен 30° . Найдите площадь ромба.
б) Периметр ромба равен 12, а один из его углов равен 60° . Найдите площадь ромба.
- A15.** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб.
- а) Найдите длину его меньшей диагонали;
б) Найдите длину его большей диагонали.



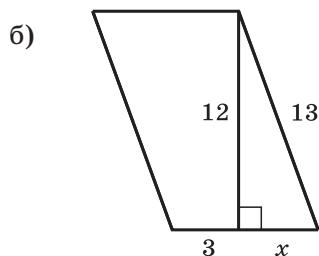
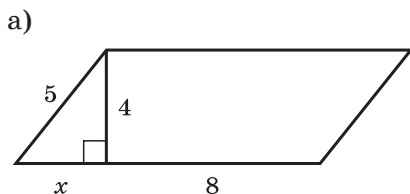
- A16.** а) Периметр параллелограмма равен 72, а одна из его сторон равна 4. Найдите длины остальных сторон параллелограмма.
 б) Периметр параллелограмма равен 80, а одна из его сторон равна 8. Найдите длины остальных сторон параллелограмма.
- A17.** Найдите неизвестные углы параллелограмма, если один из его углов равен:
 а) 41° ; б) 141° .
- A18.** а) Один из углов параллелограмма на 12° больше другого угла. Найдите эти углы.
 б) Один из углов параллелограмма на 14° меньше другого угла. Найдите эти углы.
- A19.** а) Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 30° и 45° . Найдите больший угол параллелограмма.
 б) Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 45° и 60° . Найдите меньший угол параллелограмма.
- A20.** Найдите острый угол параллелограмма $ABCD$, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный:
 а) 15° ; б) 62° .
- A21.** а) Сторона параллелограмма равна 12, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой стороны равно 4. Найдите площадь параллелограмма.
 б) Сторона параллелограмма равна 14, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой стороны равно 3. Найдите площадь параллелограмма.
- A22.** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



A23. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



A24. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



A25. а) Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне AD . Докажите, что M — середина AD .

б) Биссектрисы углов C и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке L , лежащей на стороне AB . Докажите, что L — середина AB .

A26. а) Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AD . Точка L — середина стороны AB . Докажите, что DL — биссектриса угла ADC .

б) Сторона AD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD . Точка M — середина стороны AD . Докажите, что CM — биссектриса угла BCD .

A27. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку F . Докажите, что:

а) сумма площадей треугольников BFC и AFD равна сумме площадей треугольников ABF и CDF ;

б) сумма площадей треугольников ABF и CDF равна половине площади параллелограмма.

A28. а) Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.

б) Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что $BK = DM$.

Уровень В

- В1.** Найдите площадь квадрата, если расстояние от вершины квадрата до середины стороны, не содержащей эту вершину, равно:
а) 3; б) 4.
- В2.** Найдите высоту AH ромба $ABCD$, если она делит сторону CD на отрезки: а) $DH = 8$ и $CH = 2$; б) $DH = 6$ и $CH = 4$.
- В3.** а) Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.
б) Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 20, а одна из диагоналей ромба равна 80. Найдите углы ромба.
- В4.** а) Стороны параллелограмма равны 10 и 24, а одна из его диагоналей равна 26. Найдите другую диагональ параллелограмма.
б) Стороны параллелограмма равны 15 и 20, а одна из его диагоналей равна 25. Найдите другую диагональ параллелограмма.
- В5.** Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если:
а) $BK = 7$, $CK = 12$; б) $BK = 6$, $CK = 14$.
- В6.** Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC . Найдите:
а) AB , если $BC = 44$; б) BC , если $AB = 24$.
- В7.** а) Диагонали параллелограмма равны 20 и 22. Может ли одна из его сторон быть равной 21? Ответ обоснуйте.
б) Диагонали параллелограмма равны 24 и 26. Может ли одна из его сторон быть равной 25? Ответ обоснуйте.
- В8.** а) На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отметили точку M . Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника MCD равна 38.
б) На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отметили точку M . Найдите площадь треугольника MCB , если площадь параллелограмма равна 42.

- В9.** Найдите периметр параллелограмма, если сумма длин трёх любых его сторон равна:
а) 48; б) 72.

Уровень С

- С1.** Может ли четырёхугольник быть квадратом, если расстояния от некоторой точки до трёх вершин этого четырёхугольника равны:
а) 1, 6 и 11; б) 2, 9 и 18?
Ответ обоснуйте.
- С2.** а) Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади трапеции $AKCD$, если $AB : AD = 3 : 5$.
б) Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите отношение площади трапеции $AKCD$ к площади треугольника ABK , если $AD : AB = 7 : 4$.
- С3.** а) Высота ромба, проведённая из вершины тупого угла, делит ромб на треугольник и трапецию, площади которых равны 30 и 70 соответственно. Найдите высоту ромба.
б) Высота ромба, проведённая из вершины тупого угла, делит ромб на треугольник и трапецию, площади которых равны 40 и 60 соответственно. Найдите высоту ромба.
- С4.** а) Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 11$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 5.
б) Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $AB = 9$, а расстояние от точки K до стороны BC равно 7.
- С5.** а) Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку M . Найдите площадь параллелограмма, если сумма площадей треугольников ABM и MCD равна 46.
б) Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку M . Найдите площадь параллелограмма, если сумма площадей треугольников BMC и AMD равна 42.

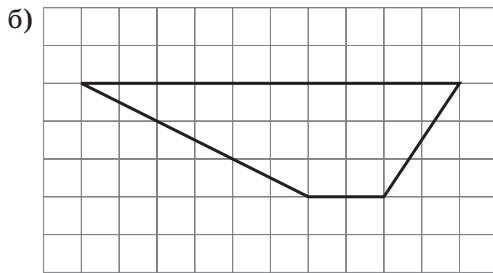
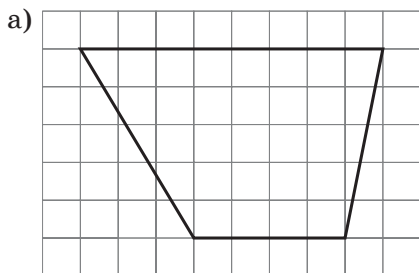
- С6.** а) Точка M лежит на стороне AB параллелограмма $ABCD$ и делит эту сторону в отношении $AM : MB = 3 : 4$. Отрезки DM и AC пересекаются в точке F . Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника AFD равна 63.
- б) Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ и делит эту сторону в отношении $BM : MC = 2 : 5$. Отрезки DM и AC пересекаются в точке F . Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника CFD равна 56.
- С7.** а) В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC равны 13, 7 и 5 соответственно.
- б) В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC равны 13, 6 и 5 соответственно.
- С8.** Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если:
- а) $BC = 11$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 3;
- б) $BC = 12$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 9.

2.2. Трапеция

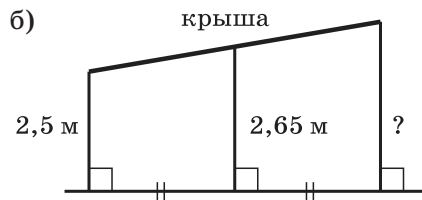
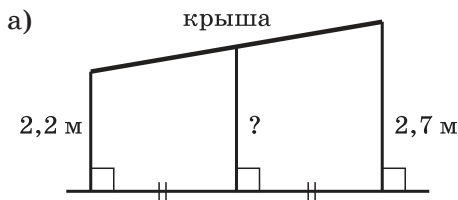
Уровень А

- А1.** а) Одно из оснований трапеции равно 17, а средняя линия равна 10. Найдите другое основание трапеции.
- б) Одно из оснований трапеции равно 14, а средняя линия равна 11. Найдите другое основание трапеции.
- А2.** а) Найдите высоту трапеции, если площадь трапеции равна 28, а сумма длин оснований равна 14.
- б) Найдите высоту трапеции, если площадь трапеции равна 32, а сумма длин оснований равна 16.

- А3.** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.

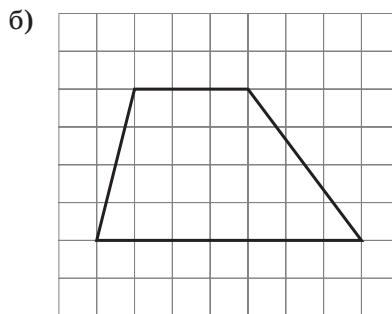
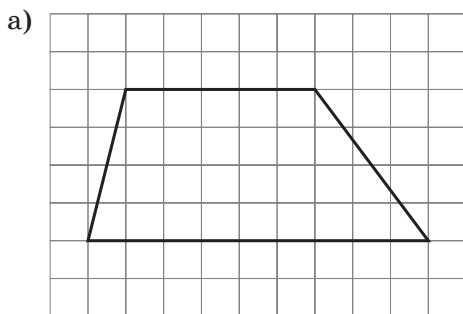


- А4.** а) Наклонная крыша установлена на трёх вертикальных опорах, основания которых расположены на одной прямой. Средняя опора стоит посередине между малой и большой опорами (см. рисунок а). Высота малой опоры 2,2 м, высота большой опоры 2,7 м. Найдите высоту средней опоры. Ответ дайте в метрах.



- б) Наклонная крыша установлена на трёх вертикальных опорах, основания которых расположены на одной прямой. Средняя опора стоит посередине между малой и большой опорами (см. рисунок б). Высота малой опоры 2,5 м, высота средней опоры 2,65 м. Найдите высоту большой опоры. Ответ дайте в метрах.
- А5.** а) Концы отрезка AB лежат по одну сторону от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 24, а расстояние от точки B до прямой l равно 62. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .
- б) Концы отрезка AB лежат по одну сторону от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 34, а расстояние от точки B до прямой l равно 46. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .

- A6.** а) Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 33° и 13° соответственно.
 б) Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 46° и 1° соответственно.
- A7.** а) Найдите меньший угол равнобедренной трапеции, если сумма двух её углов равна 218° .
 б) Найдите меньший угол равнобедренной трапеции, если сумма двух её углов равна 196° .
- A8.** а) Найдите угол ABD трапеции $ABCD$, если $AB = CD$, $\angle BDA = 14^\circ$ и $\angle BDC = 106^\circ$.
 б) Найдите угол ABD трапеции $ABCD$, если $AB = CD$, $\angle BDA = 30^\circ$ и $\angle BDC = 110^\circ$.
- A9.** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.



- A10.** а) Биссектрисы углов A и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне BC . Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB , AD и CD .
 б) Биссектрисы углов C и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , лежащей на стороне AB . Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC , CD и AD .
- A11.** а) Докажите, что если $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC , то площади треугольников ABC и DBC равны.
 б) Докажите, что если $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC , то площади треугольников ACD и DBA равны.

- A12.** На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F . Докажите, что:
- сумма площадей треугольников BFC и AFD равна сумме площадей треугольников ABF и CFD ;
 - сумма площадей треугольников ABF и CFD равна половине площади трапеции.
- A13.** Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что:
- сумма площадей треугольников BCK и ADK равна половине площади трапеции;
 - площадь треугольника KAB равна сумме площадей треугольников BCK и ADK .
- A14.** а) Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны, если основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны 4,5 и 18 соответственно, $BD = 9$.
- б) Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны, если основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны 3 и 12 соответственно, $BD = 6$.
- A15.** Выберите верное утверждение:
- 1) в любом четырёхугольнике есть острый угол;
2) в любом параллелограмме есть острый угол;
3) в любом ромбе есть острый угол;
4) в любой трапеции есть острый угол;
 - 1) в любом ромбе есть тупой угол;
2) в любом параллелограмме есть тупой угол;
3) в любой трапеции есть тупой угол;
4) в любом четырёхугольнике есть тупой угол.
- A16.** Выберите верное утверждение:
- 1) в любом параллелограмме все стороны равны;
2) в любой трапеции все стороны равны;
3) существует параллелограмм, все стороны которого равны;
4) существует трапеция, все стороны которой равны.
 - 1) существует параллелограмм, все стороны которого различны;
2) существует трапеция, все стороны которой различны;
3) в любом параллелограмме все стороны различны;
4) в любой трапеции все стороны различны.

A17. Выберите верное утверждение:

- а) 1) существует параллелограмм, все углы которого равны;
2) существует трапеция, все углы которой равны;
3) в любом параллелограмме все углы равны;
4) в любой трапеции все углы равны;
- б) 1) в любой трапеции все углы различны;
2) в любом параллелограмме все углы различны;
3) существует трапеция, все углы которой различны;
4) существует параллелограмм, все углы которого различны.

Уровень В

B1. Найдите углы равнобедренной трапеции, если сумма двух из них равна:

- а) 102° ; б) 52° .

B2. а) Одно из оснований трапеции в 17 раз меньше её средней линии. Во сколько раз оно меньше другого основания трапеции?

б) Одно из оснований трапеции в 16 раз меньше её средней линии. Во сколько раз оно меньше другого основания трапеции?

B3. а) Основания трапеции равны 16 и 20, а одна из диагоналей равна 18. Найдите длины отрезков, на которые точка пересечения диагоналей трапеции делит эту диагональ.

б) Основания трапеции равны 12 и 18, а одна из диагоналей равна 20. Найдите длины отрезков, на которые точка пересечения диагоналей трапеции делит эту диагональ.

B4. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD , угол ADC равен 60° . Найдите периметр трапеции, если:

- а) $BD = 4$; б) $AC = 2\sqrt{3}$.

B5. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если:

а) $AD = 42$, $BC = 14$, $CF : DF = 4 : 3$;

б) $AD = 25$, $BC = 15$, $CF : DF = 3 : 2$.

- В6.** Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны 60° и 135° соответственно, а сторона CD равна:
а) 36; б) 24.
- В7.** Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны 30° и 135° соответственно, а сторона CD равна:
а) 29; б) 17.
- В8.** Найдите длины отрезков, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию, если основания трапеции равны:
а) 12 и 18; б) 10 и 16.
- В9.** а) Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 12, а расстояние от точки B до прямой l равно 36. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .
б) Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 24, а расстояние от точки B до прямой l равно 30. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .
- В10.** Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите сторону AB , если:
а) $AF = 24$, $BF = 10$;
б) $AF = 24$, $BF = 18$.

Уровень С

- С1.** Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если:
а) $AD = 42$, $BC = 14$, $CF : DF = 4 : 3$;
б) $AD = 56$, $BC = 28$, $CF : DF = 5 : 2$.
- С2.** а) Углы при одном из оснований трапеции равны 39° и 51° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 19 и 3. Найдите основания трапеции.
б) Углы при одном из оснований трапеции равны 47° и 43° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 16 и 14. Найдите основания трапеции.

- С3.** а) Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны 60° и 135° соответственно, а $CD = 36$.
б) Найдите боковую сторону CD трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны 120° и 45° соответственно, а $AB = 24$.
- С4.** Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если:
- а) $AD = 33$, $BC = 11$, а площадь трапеции $AEFD$ относится к площади трапеции $EFCD$ как $27 : 5$;
б) $AD = 24$, $BC = 8$, а площадь трапеции $AEFD$ относится к площади трапеции $EFCD$ как $11 : 21$.
- С5.** Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если:
- а) $AD = 12$, $BC = 24$;
б) $AD = 10$, $BC = 15$.
- С6.** а) Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны 9 и 3 соответственно, $AB = 2$. Найдите длину диагонали BD , если длина диагонали AC равна 4.
б) Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны 8 и 4 соответственно, $CD = 3$. Найдите длину диагонали AC , если длина диагонали BD равна 2.
- С7.** а) Биссектриса угла A трапеции $ABCD$ пересекает боковую сторону CD в точке K . Найдите AB , если $AD = 12$, $BC = 8$, $CK : KD = 3 : 4$.
б) Биссектриса угла D трапеции $ABCD$ пересекает боковую сторону AB в точке K . Найдите CD , если $AD = 14$, $BC = 5$, $AK : KB = 7 : 2$.
- С8.** а) Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 24 и 25 соответственно, а основание BC равно 9. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.
б) Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 10 и 26 соответственно, а основание BC равно 1. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.

- С9.** Середина K боковой стороны CD трапеции $ABCD$ является основанием перпендикуляра к этой стороне, проведённого из вершины A . Найдите расстояние от середины стороны AB до прямой CD , если:
- а) $AK = 24$, а площадь треугольника BCK в 6 раз меньше площади треугольника ADK ;
 - б) $AK = 18$, а площадь треугольника BCK в 9 раз меньше площади треугольника ADK .
- С10.** а) Углы при одном из оснований трапеции равны 19° и 71° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 12 и 10. Найдите основания трапеции.
- б) Углы при одном из оснований трапеции равны 17° и 73° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 14 и 8. Найдите основания трапеции.
- С11.** а) Диагонали трапеции равны 10 и 24, а основания — 7 и 19. Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали трапеции.
- б) Боковые стороны трапеции равны 15 и 20, а основания — 6 и 31. Найдите угол между прямыми, содержащими боковые стороны трапеции.
- С12.** Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны:
- а) 3 и 4, а средняя линия равна 2,5;
 - б) 5 и 12, а средняя линия равна 6,5.
- С13.** Точка M является серединой боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Найдите:
- а) площадь трапеции, если площадь треугольника MCD равна 28;
 - б) площадь треугольника MCD , если площадь трапеции равна 26.
- С14.** В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD , точка M — середина стороны AB .
- 1) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны, если O — точка пересечения отрезков CE и DM .
 - 2) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если:
 - а) $BC = 2$, $AD = 5$;
 - б) $BC = 5$, $AD = 7$.

2.3. Прочие многоугольники

Уровень А

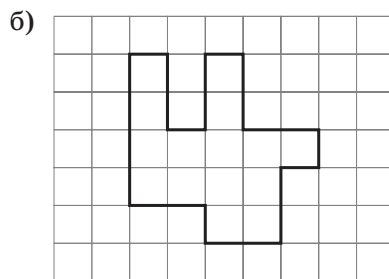
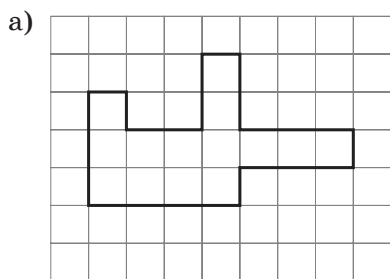
A1. Найдите число сторон правильного многоугольника, каждый из углов которого равен:

- а) 162° ;
- б) 165° .

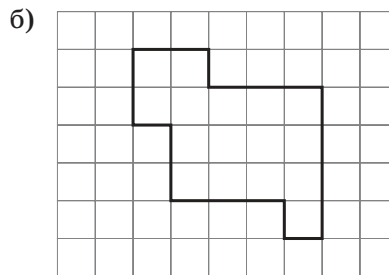
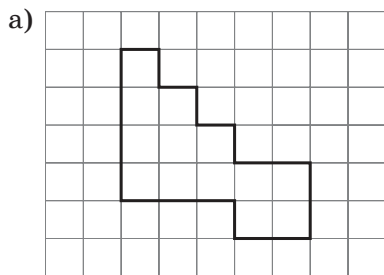
A2. а) Один из углов семиугольника равен 11° . Найдите сумму остальных его углов.

б) Один из углов девятиугольника равен 14° . Найдите сумму остальных его углов.

A3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.



A4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.

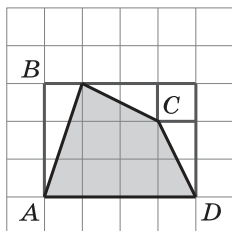


- A5.** а) Найдите число сторон многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинно только одно:
- 1) число сторон многоугольника больше 15;
 - 2) число сторон многоугольника больше 16;
 - 3) число сторон многоугольника больше 17;
 - 4) число сторон многоугольника больше 18;
- б) Найдите число сторон многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинно только одно:
- 1) число сторон многоугольника меньше 15;
 - 2) число сторон многоугольника меньше 16;
 - 3) число сторон многоугольника меньше 17;
 - 4) число сторон многоугольника меньше 18.
- A6.** а) Найдите число сторон многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны ровно два:
- 1) число сторон многоугольника больше 15;
 - 2) число сторон многоугольника больше 16;
 - 3) число сторон многоугольника больше 17;
 - 4) число сторон многоугольника больше 18;
- б) Найдите число сторон многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинно ровно два:
- 1) число сторон многоугольника меньше 15;
 - 2) число сторон многоугольника меньше 16;
 - 3) число сторон многоугольника меньше 17;
 - 4) число сторон многоугольника меньше 18.
- A7.** а) Найдите число сторон многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны ровно три:
- 1) число сторон многоугольника больше 15;
 - 2) число сторон многоугольника больше 16;
 - 3) число сторон многоугольника больше 17;
 - 4) число сторон многоугольника больше 18;
- б) Найдите число сторон многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны ровно три:
- 1) число сторон многоугольника меньше 15;
 - 2) число сторон многоугольника меньше 16;
 - 3) число сторон многоугольника меньше 17;
 - 4) число сторон многоугольника меньше 18.

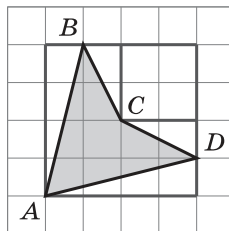
Уровень В

В1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.

а)



б)



В2. а) Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны. Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются эти середины, — прямоугольник.

б) Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны. Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются эти середины, — ромб.

В3. Найдите длины диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если расстояния от середины стороны AD до середин сторон AB и CD соответственно равны:

а) 6 и 12; б) 8 и 14.

В4. а) Учитель изобразил на доске выпуклый многоугольник и попросил учеников оценить сумму его углов. Ваня сказал, что сумма углов многоугольника меньше 600° ; Веня — что сумма углов многоугольника меньше 700° ; Женя — что сумма углов многоугольника меньше 800° . Учитель ответил, что прав только один из них. Докажите, что многоугольник, изображённый учителем, является шестиугольником.

б) Учитель изобразил на доске выпуклый многоугольник и попросил учеников оценить сумму его углов. Вика сказала, что сумма углов многоугольника больше 500° ; Ника — что сумма углов многоугольника больше 600° ; Лика — что сумма углов многоугольника больше 700° . Учитель ответил, что права только одна из них. Докажите, что многоугольник, изображённый учителем, является пятиугольником.

В5. а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинно только одно утверждение:

- 1) сумма углов многоугольника больше 500° ;
- 2) сумма углов многоугольника больше 600° ;
- 3) сумма углов многоугольника больше 700° ;
- 4) сумма углов многоугольника больше 800° ;

б) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинно только одно утверждение:

- 1) сумма углов многоугольника меньше 500° ;
- 2) сумма углов многоугольника меньше 600° ;
- 3) сумма углов многоугольника меньше 700° ;
- 4) сумма углов многоугольника меньше 800° .

В6. а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны ровно два утверждения:

- 1) сумма углов многоугольника больше 300° ;
- 2) сумма углов многоугольника больше 500° ;
- 3) сумма углов многоугольника больше 700° ;
- 4) сумма углов многоугольника больше 900° ;

б) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны ровно два утверждения:

- 1) сумма углов многоугольника меньше 400° ;
- 2) сумма углов многоугольника меньше 600° ;
- 3) сумма углов многоугольника меньше 800° ;
- 4) сумма углов многоугольника меньше 1000° .

В7. а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны все четыре утверждения:

- 1) сумма углов многоугольника больше 400° ;
- 2) сумма углов многоугольника больше 500° ;
- 3) сумма углов многоугольника меньше 600° ;
- 4) сумма углов многоугольника меньше 700° .

б) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если среди следующих четырёх утверждений о нём нет ни одного истинного:

- 1) сумма углов многоугольника меньше 600° ;
- 2) сумма углов многоугольника меньше 700° ;
- 3) сумма углов многоугольника больше 800° ;
- 4) сумма углов многоугольника больше 900° .

В8. а) Найдите сумму углов выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны только три:

- 1) сумма углов многоугольника больше 600° ;
- 2) сумма углов многоугольника больше 700° ;
- 3) сумма углов многоугольника больше 800° ;
- 4) сумма углов многоугольника больше 900° ;

б) Найдите сумму углов выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны только три:

- 1) сумма углов многоугольника меньше 300° ;
- 2) сумма углов многоугольника меньше 500° ;
- 3) сумма углов многоугольника меньше 700° ;
- 4) сумма углов многоугольника меньше 900° .

В9. а) Найдите сумму углов выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинно только одно:

- 1) число сторон многоугольника больше 5;
- 2) число сторон многоугольника больше 6;
- 3) число сторон многоугольника больше 7;
- 4) число сторон многоугольника больше 8;

б) Найдите сумму углов выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинно только одно:

- 1) число сторон многоугольника меньше 5;
- 2) число сторон многоугольника меньше 6;
- 3) число сторон многоугольника меньше 7;
- 4) число сторон многоугольника меньше 8.

Уровень С

С1. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите сторону AD , если:

- а) $BC = 4$ см, а углы B и C четырёхугольника равны 128° и 112° соответственно;
- б) $BC = 6$ см, а углы B и C четырёхугольника равны 116° и 124° соответственно.

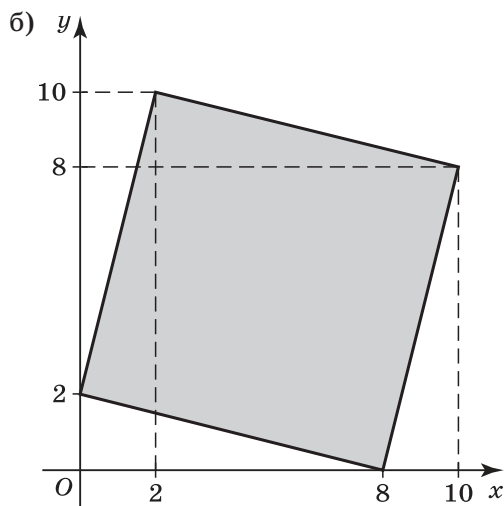
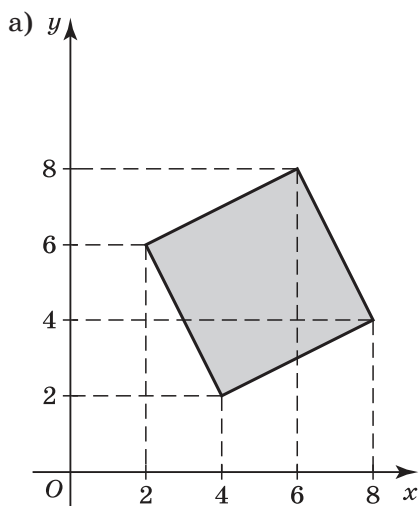
- С2.** а) Сумма длин двух любых сторон тринадцатиугольника равна 6. Найдите периметр тринадцатиугольника.
 б) Сумма длин двух любых сторон одиннадцатиугольника равна 4. Найдите периметр одиннадцатиугольника.
- С3.** а) Найдите величины углов пятнадцатиугольника, если известно, что сумма двух любых его углов одинакова.
 б) Найдите величины углов двенадцатиугольника, если известно, что сумма двух любых его углов одинакова.
- С4.** а) Найдите косинус угла D выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если косинус угла B равен $\frac{5}{6}$, $AB = 6$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AD = 8$.
 б) Найдите косинус угла C выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если косинус угла A равен $-\frac{2}{3}$, $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 7$, $AD = 6$.
- С5.** Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если из четырёх следующих утверждений о нём три утверждения истинны, а одно ложно:
 а) 1) $ABCD$ — квадрат;
 2) $ABCD$ — трапеция с тремя равными сторонами;
 3) периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 52;
 4) сумма длин трёх сторон четырёхугольника $ABCD$ на 8 больше длины его четвёртой стороны;
 б) 1) $ABCD$ — квадрат;
 2) $ABCD$ — трапеция с тремя равными сторонами;
 3) периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 56;
 4) сумма длин трёх сторон четырёхугольника $ABCD$ на 28 больше длины его четвёртой стороны.
- С6.** Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны, а длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны:
 а) 12 и 16;
 б) 10 и 18.

- С7.** а) Площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна 19. Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно середин отрезков AB и AD соответственно. Найдите площадь четырёхугольника C_1BDC_2 .
- б) Найдите площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно середин отрезков AB и AD соответственно, а площадь четырёхугольника C_1BDC_2 равна 38.
- С8.** Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если точки A, B, C, D лежат на сторонах MN, NP, PK, KM соответственно выпуклого четырёхугольника $MNPK$, причём:
- а) $MA : AN = PC : CK = 5 : 2$, $NB : BP = KD : DM = 3 : 4$, а площадь четырёхугольника $MNPK$ равна 98;
- б) $MA : AN = PC : CK = 4 : 5$, $NB : BP = KD : DM = 2 : 7$, а площадь четырёхугольника $MNPK$ равна 81.
- С9.** а) Середина диагонали BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ удалена от каждой из его сторон на расстояние, равное 8 см. Найдите площадь четырёхугольника, если $AC = 20$ см.
- б) Середина диагонали AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ удалена от каждой из его сторон на расстояние, равное 9 см. Найдите площадь четырёхугольника, если $BD = 15$ см.
- С10.** Точки F, M и K являются серединами сторон AD, AB и CD соответственно выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если:
- а) $FM = 6\sqrt{3}$, $KF = 10$, $\angle MFK = 120^\circ$;
- б) $FM = 8\sqrt{2}$, $KF = 12$, $\angle MFK = 135^\circ$.
- С11.** а) Точка C_1 симметрична вершине C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ относительно середины стороны AD . Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если площадь четырёхугольника $ABCC_1$ равна 37.
- б) Точка B_1 симметрична вершине B выпуклого четырёхугольника $ABCD$ относительно середины стороны AD . Найдите площадь четырёхугольника $BCDB_1$, если площадь четырёхугольника $ABCD$ равна 31.

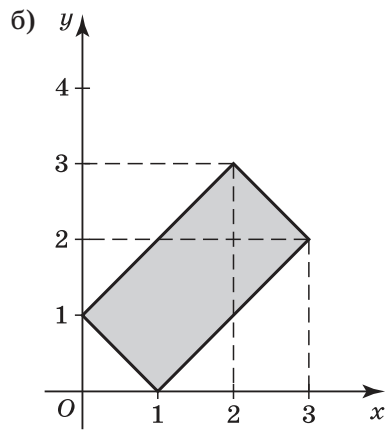
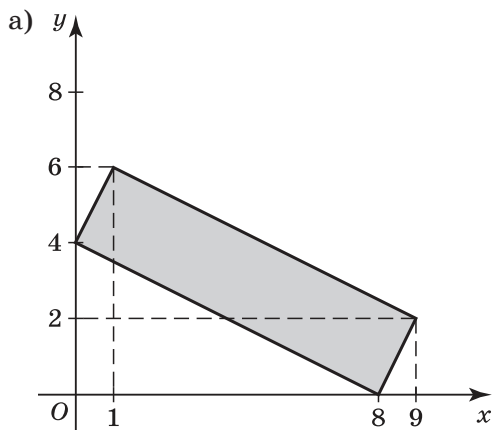
2.4. Координаты и векторы

Уровень А

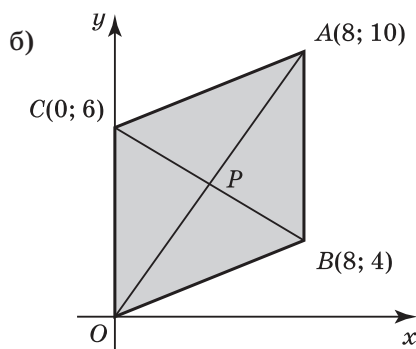
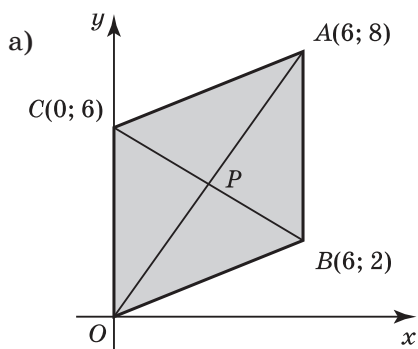
А1. На координатной плоскости изображён квадрат. Найдите его площадь.



А2. На координатной плоскости изображён прямоугольник. Найдите его площадь.

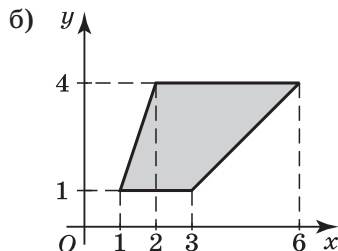
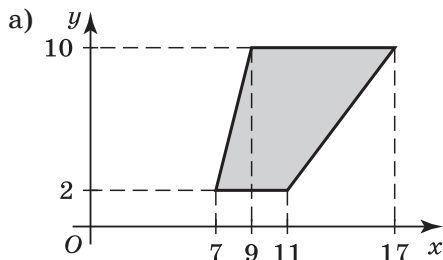


- A3.** а) Точки $O(0; 0)$, $A(6; 8)$, $B(6; 2)$, $C(0; 6)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите ординату точки P пересечения его диагоналей.

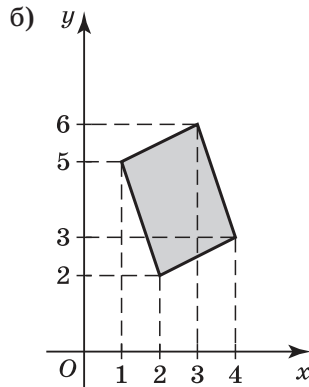
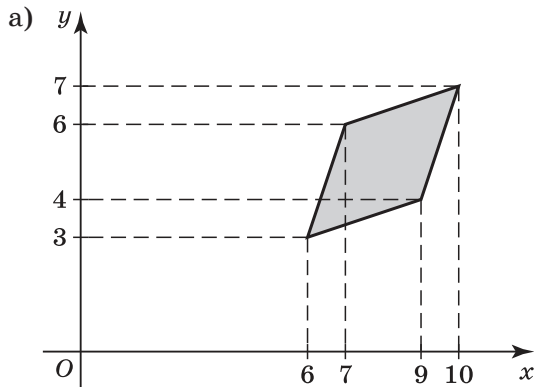


- б) Точки $O(0; 0)$, $A(8; 10)$, $B(8; 4)$, $C(0; 6)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей.

- A4.** Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



- A5.** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



- A6.** а) $ABCD$ — параллелограмм, точка P — середина стороны BC .
Запишите разложение вектора $\overrightarrow{AP}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.
- б) $ABCD$ — параллелограмм, точка M — середина стороны CD . Запишите разложение вектора $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.
- A7.** а) $ABCD$ — параллелограмм, точка P лежит на стороне BC .
Запишите разложение вектора $\overrightarrow{AP}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, если $BP : PC = 3 : 2$.
- б) $ABCD$ — параллелограмм, точка M лежит на стороне CD .
Запишите разложение вектора $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, если $DM : MC = 2 : 3$.

Уровень В

- B1.** а) Точки $O(0; 0)$, $B(6; 2)$, A и $C(0; 6)$ являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки A .
- б) Точки $O(0; 0)$, $A(10; -5)$, $B(10; 10)$, $C(0; 15)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите ординату точки P пересечения его диагоналей.
- B2.** а) Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты $(9; 0)$, $(10; 9)$, $(1; 10)$, $(0; 1)$.
- б) Найдите площадь прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(1; 2)$, $(10; 2)$, $(10; 7)$, $(1; 7)$.
- B3.** а) Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты $(1; 7)$, $(6; 4)$, $(6; 6)$, $(1; 9)$.
- б) Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1; 1)$, $(10; 1)$, $(6; 7)$, $(3; 7)$.
- B4.** а) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известны координаты его вершин: $A(5; 4)$, $B(7; 8)$, $C(11; 4)$, $D(10; -2)$.
- б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известны координаты его вершин: $A(4; 5)$, $B(8; 9)$, $C(12; 5)$, $D(11; -3)$.

Уровень С

- С1.** Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известны координаты его вершин:
- а) $A(-2; -2)$, $B(-2; 5)$, $C(2; 7)$, $D(6; -2)$;
 - б) $A(-3; 1)$, $B(-3; 9)$, $C(2; 12)$, $D(9; 1)$.
- С2.** Найдите площадь пятиугольника $ABCDF$, если известны координаты его вершин:
- а) $A(-6; -2)$, $B(-2; 3,5)$, $C(8; 1)$, $D(1; -6)$, $F(-4; -4)$;
 - б) $A(-1; -8)$, $B(4,5; -4)$, $C(2; 6)$, $D(-5; -1)$, $F(-3; -6)$.
- С3.** а) Точка P является серединой стороны AD параллелограмма $ABCD$. Отрезки BP и AC пересекаются в точке M . Найдите разложение вектора $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ и вычислите длину этого вектора, если $AB = 6$, $BC = 12$, $\angle ABC = 120^\circ$.
- б) Точка P делит сторону AD параллелограмма $ABCD$ в отношении $AP : PD = 1 : 2$. Отрезки BP и AC пересекаются в точке M . Найдите разложение вектора $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ и вычислите длину этого вектора, если $AB = 4$, $BC = 12$, $\angle ABC = 120^\circ$.
- С4.** а) Точка P делит боковую сторону CD трапеции $ABCD$ в отношении $CP : PD = 1 : 4$. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ и вычислите длину этого вектора, если боковая сторона AB равна 1 и равна основанию BC , основание AD равно 2, а $\angle BAD = 60^\circ$.
- б) Точка P делит боковую сторону CD трапеции $ABCD$ в отношении $CP : PD = 1 : 3$. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ и вычислите длину этого вектора, если боковая сторона AB равна 2 и равна основанию BC , основание AD равно 6, а $\angle BAD = 60^\circ$.
- С5.** а) Четырёхугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A(2; -4)$, $B(4; 7)$, $C(9; 10)$, $D(10; 5)$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей этого четырёхугольника.
- б) Четырёхугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A(4; 5)$, $B(12; 8)$, $C(10; 2)$, $D(-3; -4)$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей этого четырёхугольника.

3.1. Углы и отрезки, связанные с окружностью

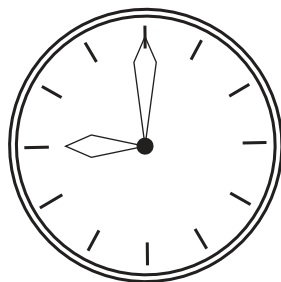
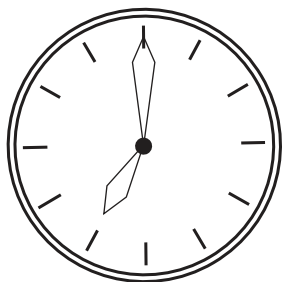
Уровень А

- A1.** а) Точки A , B , C и D , последовательно расположенные на окружности в указанном порядке, делят её на четыре дуги, градусные меры которых относятся как $1 : 2 : 3 : 4$ (дуга AB — наименьшая). Найдите градусную меру дуги BD .
б) Точки A , B , C и D , последовательно расположенные на окружности в указанном порядке, делят её на четыре дуги, градусные меры которых относятся как $2 : 1 : 4 : 3$ (дуга AB — наименьшая). Найдите градусную меру дуги BD .
- A2.** Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, длина которой равна:
а) $2\sqrt{\pi}$; б) $6\sqrt{\pi}$.
- A3.** а) Центральный угол на 25° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.
б) Центральный угол на 44° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.
- A4.** Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна:
а) $\frac{1}{36}$ длины окружности;
б) $\frac{1}{12}$ длины окружности.
- A5.** Найдите угол ABC между хордой AB и касательной к окружности, проведённой через точку B , если хорда AB стягивает дугу окружности в:
а) 24° ; б) 32° .
- A6.** Отрезки AB и BC являются хордами окружности с центром в точке O . Найдите угол ACB , если угол C острый и угол ABO равен:
а) 42° ; б) 56° .

A7. Найдите угол, который образуют минутная и часовая стрелки часов:

а) в 7:00;

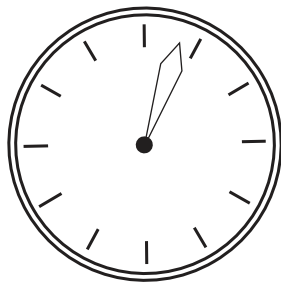
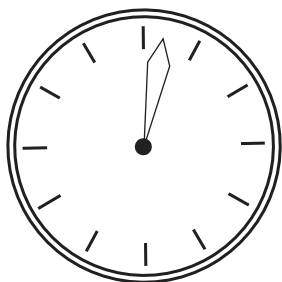
б) в 9:00.



A8. Найдите угол, который минутная стрелка описывает:

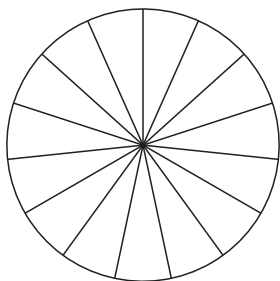
а) за 2 минуты;

б) за 4 минуты.

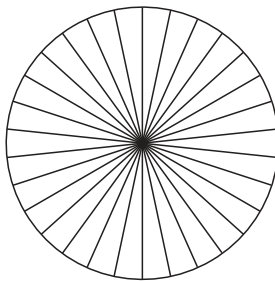


A9. а) Колесо имеет 15 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите угол, который образуют две соседние спицы.

а)



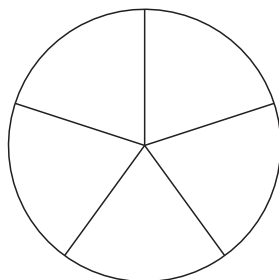
б)



б) Колесо имеет 30 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите угол, который образуют две соседние спицы.

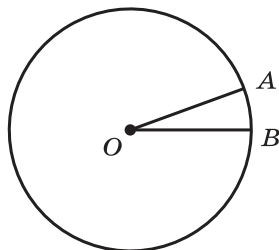
A10. На рисунке изображено колесо с пятью спицами. Сколько спиц в колесе, в котором угол между любыми соседними спицами равен:

- а) 8° ;
б) 4° ?



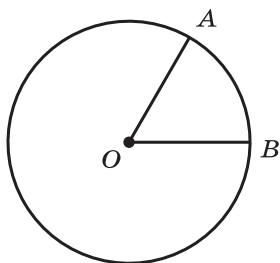
A11. а) На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 20^\circ$. Длина большей дуги AB равна 1496. Найдите длину меньшей дуги AB .

б) На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 15^\circ$. Длина большей дуги AB равна 1104. Найдите длину меньшей дуги AB .

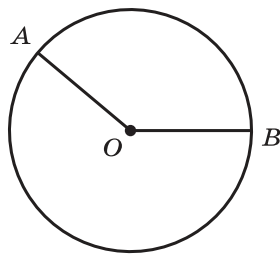


A12. а) На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 66^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 99. Найдите длину большей дуги AB .

а)



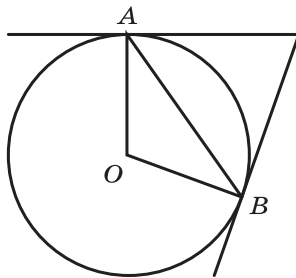
б)



б) На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 140^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 98. Найдите длину большей дуги AB .

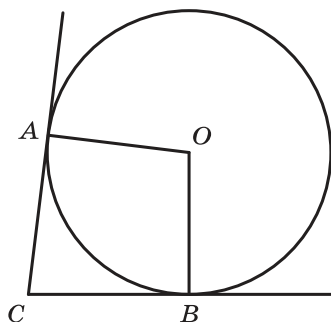
A13. Найдите угол ABO , если касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом:

- а) 72° ;
б) 52° .

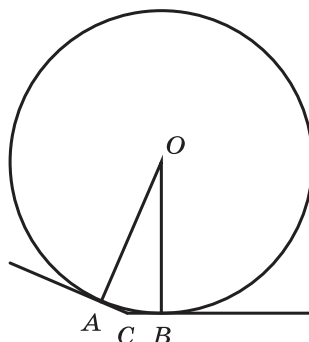


- A14.** а) В угол C величиной 83° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B , точка O — центр окружности. Найдите угол AOB .

а)



б)

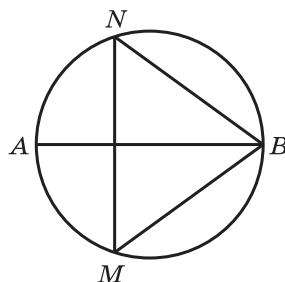
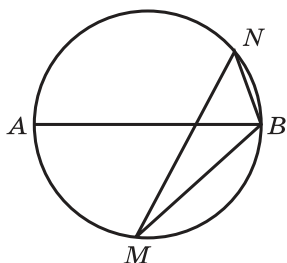


- б) В угол C величиной 157° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B , точка O — центр окружности. Найдите угол AOB .

- A15.** На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N . Найдите угол NMB , если:

а) $\angle NBA = 72^\circ$;

б) $\angle NBA = 36^\circ$.



- A16.** Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Найдите MA , если:

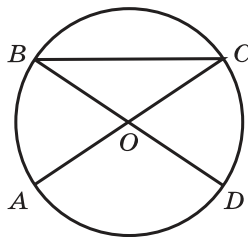
а) $MB = 8$ см, $MC = 6$ см, $MD = 4$ см;

б) $MB = 3$ см, $MC = 4$ см, $MD = 9$ см.

- A17.** а) Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как $5 : 7$. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг.

- б) Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как $3 : 5$. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг.

- A18.** а) Найдите расстояние от центра окружности, радиус которой равен 15 см, до её хорды, длина которой равна 18 см.
 б) Найдите расстояние от центра окружности, радиус которой равен 13 см, до её хорды, длина которой равна 10 см.
- A19.** а) Расстояние от центра окружности, радиус которой равен 20 см, до её хорды равно 16 см. Найдите длину хорды.
 б) Расстояние от центра окружности, радиус которой равен 29 см, до её хорды равно 21 см. Найдите длину хорды.
- A20.** Отрезок AB является хордой окружности с центром в точке O . Найдите угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A , если угол AOB равен:
 а) 28° ; б) 32° .
- A21.** Отрезок AB является хордой окружности с центром в точке O . Найдите угол AOB , если угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A , равен:
 а) 37° ; б) 14° .
- A22.** Отрезки AB и BC являются диаметром и хордой соответственно окружности с центром в точке O . Найдите угол AOC , если угол OCB равен:
 а) 39° ; б) 21° .
- A23.** Отрезки AB и BC являются диаметром и хордой соответственно окружности с центром в точке O . Найдите угол OCB , если угол AOC равен:
 а) 52° ; б) 46° .
- A24.** В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD — диаметры. Найдите угол ACB , если:
 а) $\angle AOD = 124^\circ$;
 б) $\angle AOD = 114^\circ$.



- A25.** а) Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C . Найдите угол BAC , если угол BOC равен 147° .
 б) Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C . Найдите угол BOC , если угол BAC равен 47° .

- A26.** Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, длина которой равна:
а) 16π ; б) 14π .
- A27.** Найдите длину окружности, которая ограничивает круг площадью:
а) 36π ; б) 81π .
- A28.** а) Сравните площадь круга, радиус которого равен 8 см, и площадь прямоугольника со сторонами 12 см и 16 см.
б) Сравните площадь круга, радиус которого равен 6 см, и площадь прямоугольника со сторонами 8 см и 18 см.
- A29.** а) Сравните длину окружности, радиус которой равен 8 см, и периметр прямоугольника со сторонами 12 см и 16 см.
б) Сравните длину окружности, радиус которой равен 9 см, и периметр прямоугольника со сторонами 8 см и 18 см.
- A30.** а) Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 32° . Большая дуга окружности, заключённая между сторонами этого угла, равна 100° . Найдите меньшую дугу.
б) Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 23° . Большая дуга окружности, заключённая между сторонами этого угла, равна 122° . Найдите меньшую дугу.

Уровень В

- B1.** а) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 30$, $CD = 40$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 20.
б) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB = 16$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны 15 и 8 соответственно.
- B2.** а) На окружности последовательно отмечены точки A , B , C и D , которые делят длину окружности в отношении $AB : BC : CD : DA = 3 : 4 : 5 : 6$. Найдите величину угла между прямыми AB и CD .
б) На окружности последовательно отмечены точки A , B , C и D , которые делят длину окружности в отношении $AB : BC : CD : DA = 6 : 5 : 4 : 3$. Найдите величину угла между прямыми AB и CD .

- В3.** а) Отрезки AB и AC являются хордами окружности с центром в точке O . Найдите угол BAC , если известно, что он является острым и что углы ABO и ACO равны 23° и 32° соответственно.
- б) Отрезки AB и AC являются хордами окружности с центром в точке O . Найдите угол BOC , если известно, что он меньше развёрнутого и что углы ABO и ACO равны 17° и 71° соответственно.
- В4.** а) Концы пересекающихся хорд AB и CD делят длину окружности в отношении $AC : CB : BD : DA = 2 : 3 : 5 : 10$. Найдите величину угла между прямыми AB и CD .
- б) Концы пересекающихся хорд AB и CD делят длину окружности в отношении $AC : CB : BD : DA = 3 : 5 : 2 : 4$. Найдите величину угла между прямыми AB и CD .
- В5.** а) На окружности последовательно отмечены восемь точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$, делящие окружность на равные дуги. Найдите величину угла $A_1A_7A_3$.
- б) На окружности последовательно отмечены девять точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$, делящие окружность на равные дуги. Найдите величину угла $A_2A_9A_5$.
- В6.** а) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB = 10$ см, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны 12 см и 5 см соответственно.
- б) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 12$ см, $CD = 16$ см, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 8 см.
- В7.** Отрезки AB и BC являются хордами окружности с центром в точке O . Найдите угол ACB , если угол ABO равен:
- а) 42° ; б) 36° .
- В8.** Найдите расстояние между центрами окружностей, заданных уравнениями:
- а) $(y - 2)^2 + (x + 3)^2 = 9$ и $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 36$;
- б) $(y - 3)^2 + (x + 4)^2 = 16$ и $(y + 9)^2 + (x - 1)^2 = 25$.

- В9.** а) Даны окружность $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 169$ и точка $A(-2; 5)$. Где расположена точка A — вне окружности, внутри окружности или на окружности? Ответ обоснуйте.
- б) Даны окружность $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 144$ и точка $A(-1; 6)$. Где расположена точка A — вне окружности, внутри окружности или на окружности? Ответ обоснуйте.

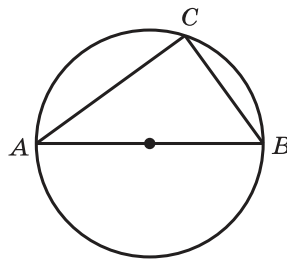
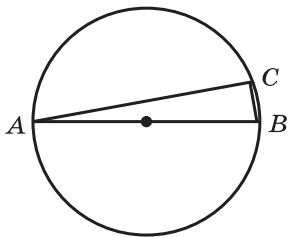
Уровень С

- С1.** а) Окружность радиуса 12 см касается внешним образом второй окружности в точке C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает первую окружность в точке A , а вторую окружность — в точке B . Найдите радиус второй окружности, если $AC = 6$ см, $BC = 7$ см.
- б) Окружность радиуса 8 см касается внешним образом второй окружности радиуса 10 см в точке C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает первую окружность в точке A , а вторую окружность — в точке B . Найдите BC , если $AC = 4$ см.
- С2.** а) Окружность радиуса 4 см касается внешним образом второй окружности в точке B . Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B , пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A . Найдите радиус второй окружности, если $AB = 6$ см.
- б) Окружность радиуса 8 см касается внешним образом окружности радиуса 18 см в точке B . Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B , пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A . Найдите AB .
- С3.** а) Две окружности, радиусы которых равны 36 см и 49 см, касаются внешним образом друг друга и касаются некоторой прямой. Найдите радиус меньшей из окружностей, касающейся двух данных окружностей и этой прямой.
- б) Две окружности, радиусы которых равны 25 см и 64 см, касаются внешним образом друг друга и касаются некоторой прямой. Найдите радиус большей из окружностей, касающейся двух данных окружностей и этой прямой.
- С4.** Напишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABC , координаты вершин которого:
- а) $A(3; -5)$, $B(28; -5)$, $C(19; 7)$;
- б) $A(5; -3)$, $B(5; 22)$, $C(17; 13)$.

3.2. Окружность и треугольники

Уровень А

-



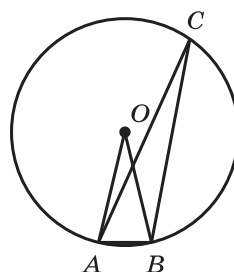
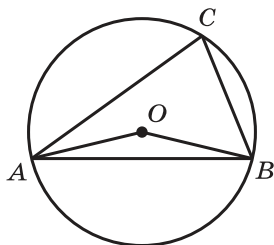
- A5.** а) Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника, если синус одного из углов треугольника равен $\frac{3}{7}$, а противолежащая этому углу сторона равна 15 см.

- б) Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника, если синус одного из углов треугольника равен $\frac{4}{9}$, а противолежащая этому углу сторона равна 16 см.
- A6.** а) Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если косинус одного из углов треугольника равен 0,25, а прилежащий к этому углу катет равен 1 см.
- б) Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если косинус одного из углов треугольника равен $\frac{3}{7}$, а прилежащий к этому углу катет равен 18 см.
- A7.** а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 20 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 24 см.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 24 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 5 см.
- A8.** Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен:
- а) 42 см; б) 21 см.
- A9.** Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен:
- а) 6 см; б) 36 см.
- A10.** Центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Найдите угол ABC , если угол BAC равен:
- а) 75° ; б) 34° .
- A11.** а) Центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Радиус окружности равен 17 см. Найдите AC , если $BC = 16$ см.
- б) Центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Радиус окружности равен 25 см. Найдите AC , если $BC = 48$ см.

A12. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB . Найдите угол ACB , если угол AOB равен:

а) 153° ;

б) 27° .



A13. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC в точках M , K и P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC , если:

а) $AP = 4$ см, $BM = 6$ см, $CK = 3$ см;

б) $AM = 5$ см, $BK = 2$ см, $CP = 4$ см.

A14. а) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен 120° , а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно 18 см.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен 90° , а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно 26 см.

Уровень В

B1. а) Углы B и C треугольника ABC равны 61° и 89° соответственно. Найдите сторону BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 10.

б) Углы B и C треугольника ABC равны 73° и 77° соответственно. Найдите сторону BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 9.

B2. а) Углы B и C треугольника ABC равны 71° и 79° соответственно. Найдите сторону BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 8.

б) Углы A и B треугольника ABC равны 63° и 87° соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $AB = 12$.

- В3.** а) Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Диаметр этой окружности равен 3 см. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника ABC .
- б) Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Найдите этот диаметр, если диаметр окружности, описанной около треугольника ABC , равен 8 см.
- В4.** Точка H является основанием высоты BH , проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите отрезок PK , если:
- а) $BH = 13$; б) $BH = 15$.
- В5.** Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите диаметр окружности, если:
- а) $AB = 3$, $AC = 5$; б) $AB = 1$, $AC = 5$.
- В6.** Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если:
- а) $AK = 14$, а сторона AC в 2 раза больше стороны BC ;
 б) $AK = 18$, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC .
- В7.** а) Одна из сторон треугольника равна 24 см. Может ли радиус окружности, описанной около этого треугольника, быть равным 11 см? Ответ обоснуйте.
- б) Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 17 см. Может ли какая-либо из сторон этого треугольника быть равной 35 см? Ответ обоснуйте.
- В8.** а) Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 5 см, а высота, проведённая к основанию, равна 8 см. Найдите площадь треугольника.
- б) Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 10 см, а основание треугольника равно 12 см. Найдите площадь треугольника.
- В9.** а) Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной A , величина которого равна 40° , в точках B и C . Найдите углы треугольника BOC .

- б) Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C . Найдите углы треугольника ABC , если угол BOC равен 50° .
- В10.** Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке M . Найдите:
- а) BM , если $CM = 14$ см; б) CM , если $BM = 12$ см.
- В11.** а) Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как $6 : 7 : 23$. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 12 см.
- б) Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как $4 : 9 : 11$. Найдите меньшую из сторон треугольника, если радиус окружности равен 14 см.
- В12.** а) В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания вписанной окружности с одним из катетов делит этот катет на отрезки 8 см и 7 см. Найдите диаметр описанной окружности треугольника.
- б) В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания вписанной окружности с одним из катетов делит этот катет на отрезки 6 см и 5 см. Найдите диаметр описанной окружности треугольника.
- В13.** Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках M , K и P . Найдите углы треугольника:
- а) ABC , если углы треугольника MKP равны 56° , 57° и 67° ;
- б) MKP , если углы треугольника ABC равны 46° , 58° и 76° .
- В14.** Точка H является основанием высоты BH , проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите:
- а) PK , если $BH = 14$ см; б) BH , если $PK = 12$ см.
- В15.** а) Точка M делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AM : MC = 5 : 8$. Окружность с диаметром BM проходит через середину стороны BC . Найдите AC , если $BM = 4$ см.

б) Точка M делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AM : MC = 7 : 9$. Окружность с диаметром BM проходит через середину стороны BC . Найдите BM , если $AC = 8$ см.

В16. а) Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны 8 см и 12 см соответственно. Окружность с центром в вершине A и радиусом AB делит прямоугольник на две части. Площадь какой из этих частей больше — той, что лежит вне окружности, или той, что лежит внутри окружности?

б) Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны 7 см и 14 см соответственно. Окружность с центром в вершине A и радиусом AB делит прямоугольник на две части. Площадь какой из этих частей больше — той, что лежит вне окружности, или той, что лежит внутри окружности?

Уровень С

С1. В треугольнике ABC известны длины сторон AB и AC , точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD , если:

а) $AB = 40$, $AC = 64$; б) $AB = 30$, $AC = 100$.

С2. а) В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении $5 : 3$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 16$.

б) В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении $5 : 4$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 18$.

С3. а) Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях 12 и 21 соответственно от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB , если косинус угла BAC равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

б) Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях 8 и 30 соответственно от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB , если косинус угла BAC равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

- С4.** На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH , если:
- $AD = 9$, $MD = 6$;
 - $AD = 9$, $MD = 3$.
- С5.** а) Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите диаметр окружности, если $AB = 9$ см, $AC = 12$ см.
- б) Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если диаметр окружности равен 10 см, $AB = 16$ см.
- С6.** Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если:
- $AK = 6$ см, сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC ;
 - $AP = 5$ см, сторона BC в 2,5 раза меньше стороны AB .
- С7.** а) Окружность радиуса 3 см, центр O которой лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC , касается катетов AB и BC . Найдите площадь треугольника ABC , если $OA = 5$ см.
- б) Окружность радиуса 3 см, центр O которой лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC , касается катетов AB и BC . Найдите площадь треугольника ABC , если $OA = \sqrt{10}$ см.
- С8.** Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите длину третьей медианы треугольника, если точки O , M , E и C лежат на одной окружности и:
- $AM = BE = 7$ см;
 - $AM = BE$, $AB = 8\sqrt{3}$ см.
- С9.** а) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 7 см, O — её центр. Центрами окружностей, описанных около треугольников AOB , BOC и COA , являются точки O_1 , O_2 и O_3 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$.

б) Центром окружности, описанной около треугольника ABC , является точка O . Центрами окружностей, описанных около треугольников AOB , BOC и COA , являются точки O_1 , O_2 и O_3 соответственно. Радиус окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$, равен 5 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

С10. а) В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B в отношении $5 : 4$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 12$ см.

б) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 13 см, $BC = 24$ см. Найдите, в каком отношении, считая от вершины B , биссектриса угла A делит высоту, проведённую из этой вершины.

С11. а) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках K и P соответственно. Найдите радиус окружности, если угол ABC равен 81° , $AC = 6$ см, угол AKC в 10 раз больше угла KAP .

б) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках K и P соответственно. Отрезки AP и KC пересекаются в точке F . Найдите радиус окружности, если угол ABC равен 58° , угол AKC меньше угла AFC на 32° , $AC = 8$ см.

С12. а) Точка D является основанием высоты, проведённой из вершины тупого угла A треугольника ABC к стороне BC . Окружность с центром в точке D и радиусом DA пересекает стороны AB и AC в точках P и M соответственно. Найдите AC , если $AB = 9$ см, $AP = 8$ см, $AM = 6$ см.

б) Точка D является основанием высоты, проведённой из вершины тупого угла B треугольника ABC к стороне AC . Окружность с центром в точке D и радиусом DB пересекает стороны BA и BC в точках P и M соответственно. Найдите BA , если $BC = 12$ см, $BP = 6$ см, $BM = 10$ см.

С13. а) В треугольнике ABC угол B равен 120° , а длина стороны AB на $7\sqrt{3}$ см меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC .

- б) В треугольнике ABC угол C равен 60° , а длина стороны AC на $4\sqrt{3}$ см меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC .
- C14.** а) Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите длину медианы, проведённой к стороне BC , если угол BAC равен 47° , угол BMC равен 133° , $BC = 4\sqrt{3}$ см.
- б) Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите BC , если медиана, проведённая к стороне BC , равна $3\sqrt{3}$ см, углы BAC и BMC равны 54° и 126° соответственно.
- C15.** а) В треугольнике ABC сторона AB на 4 см больше стороны BC . Медиана BE делит треугольник ABC на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружностей с медианой BE .
- б) В треугольнике ABC сторона AB на 6 см меньше стороны BC . Медиана BE делит треугольник ABC на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружностей с медианой BE .
- C16.** а) Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 5 см и 15 см, вписаны в угол с вершиной A . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку K , пересекает стороны угла в точках B и C . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- б) Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 4 см и 12 см, вписаны в угол с вершиной A . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку K , пересекает стороны угла в точках B и C . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- C17.** а) Две окружности касаются друг друга внешним образом и касаются третьей окружности, радиус которой равен 14 см, внутренним образом, причём центры всех трёх окружностей не лежат на одной прямой. Найдите периметр треугольника с вершинами в центрах этих окружностей.

б) Две окружности касаются друг друга внешним образом и касаются третьей окружности, радиус которой равен 11 см, внутренним образом, причём центры всех трёх окружностей не лежат на одной прямой. Найдите периметр треугольника с вершинами в центрах этих окружностей.

C18. а) Три окружности, радиусы которых равны 2 см, 3 см и 10 см, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.

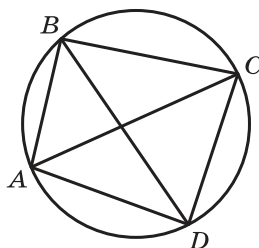
б) Три окружности, радиусы которых равны 4 см, 8 см и 12 см, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.

3.3. Окружность и многоугольники

Уровень А

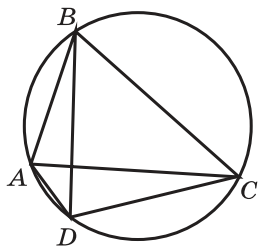
A1. а) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 39° , угол CAD равен 55° . Найдите угол ABC .

б) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 80° , угол CAD равен 34° . Найдите угол ABC .



A2. а) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 70° , угол CAD равен 49° . Найдите угол ABD .

б) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 60° , угол CAD равен 59° . Найдите угол ABD .



A3. В квадрат вписана окружность. Найдите радиус окружности, если диагональ квадрата равна:

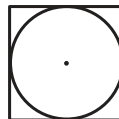
а) $12\sqrt{2}$ см; б) $3\sqrt{2}$ см.

A4. Около квадрата описана окружность. Найдите радиус окружности, если сторона квадрата равна:

- а) $8\sqrt{2}$ см; б) $3\sqrt{2}$ см.

A5. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса:

- а) 40; б) 7.



A6. а) Диагональ правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 6. Найдите радиус этой окружности.

б) Диагональ правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 5. Найдите радиус этой окружности.

A7. Найдите радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, если радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник, равен:

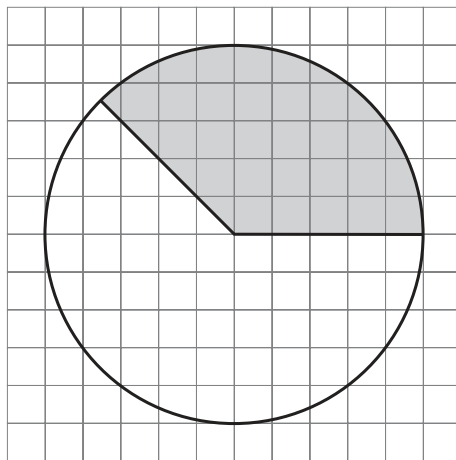
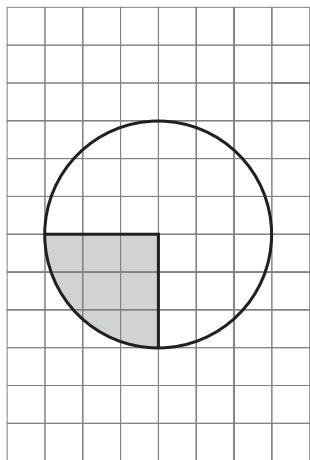
- а) 18 см; б) 6 см.

A8. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, если радиус окружности, описанной около этого шестиугольника, равен:

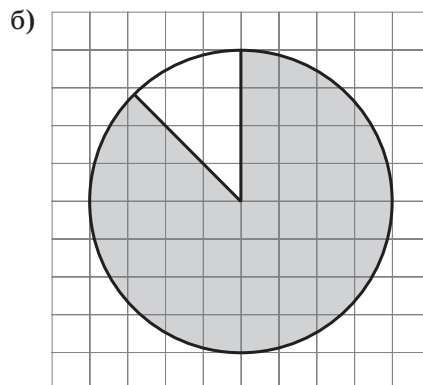
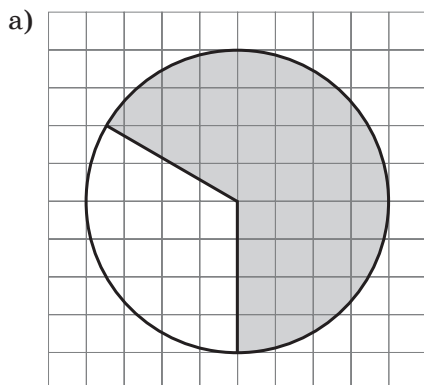
- а) 7 см; б) 12 см.

A9. На клетчатой бумаге изображён круг. Какова площадь круга, если площадь закрашенного сектора равна:

- а) 24; б) 33?

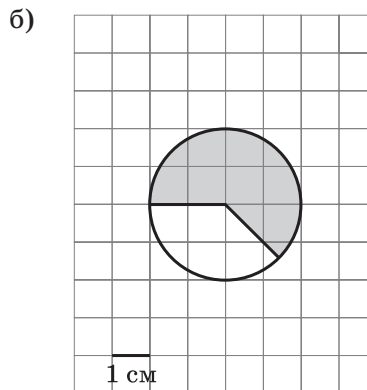
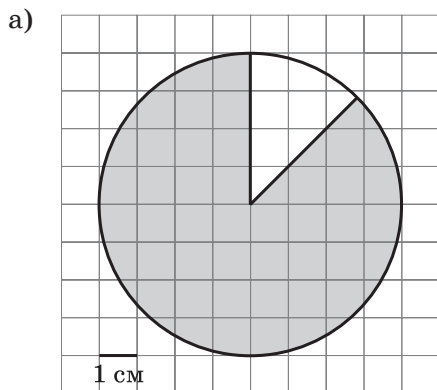


A10. а) На клетчатой бумаге изображён круг площадью 45. Найдите площадь закрашенного сектора.



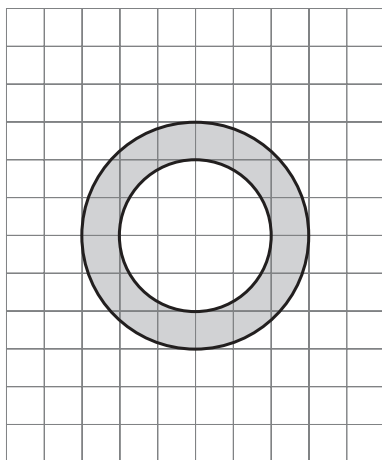
б) На клетчатой бумаге изображён круг площадью 96. Найдите площадь закрашенного сектора.

A11. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён круг. Найдите площадь закрашенного сектора. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

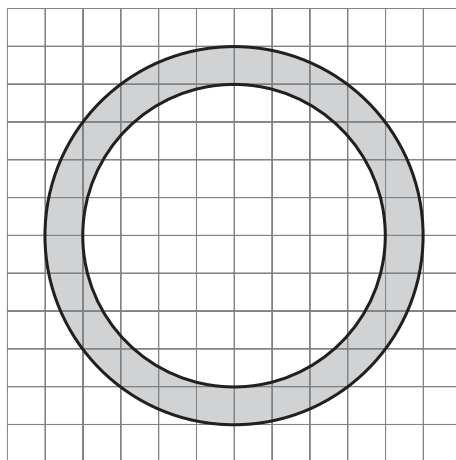


A12. а) На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 8. Найдите площадь закрашенной фигуры.

а)



б)

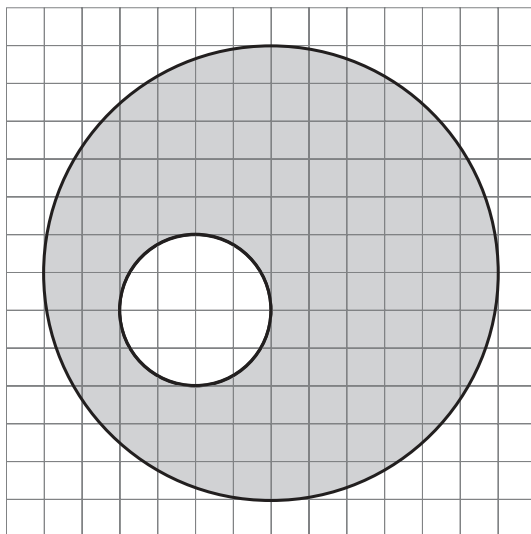
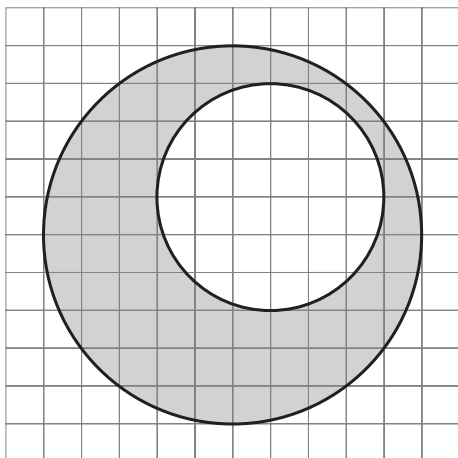


б) На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 64. Найдите площадь закрашенной фигуры.

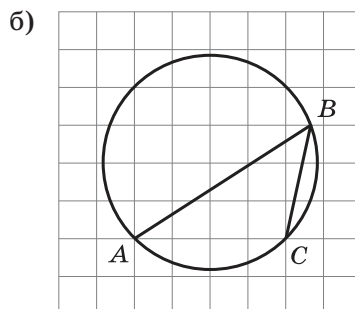
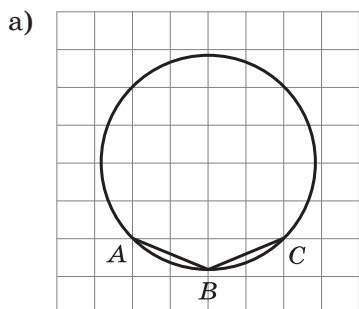
A13. На клетчатой бумаге изображены два круга. Найдите площадь закрашенной фигуры, если площадь внутреннего круга равна:

а) 36;

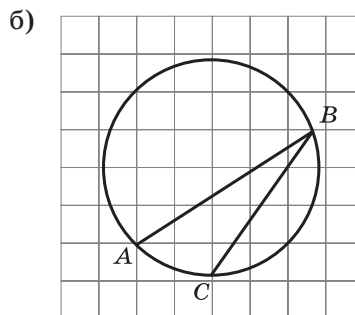
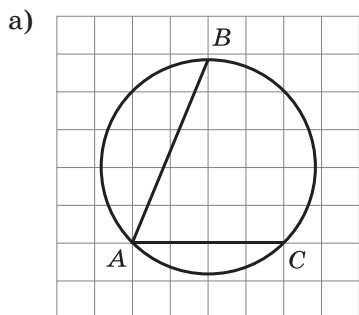
б) 3.



A14. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол ABC . Найдите его градусную величину.



A15. а) Найдите градусную меру дуги BC окружности, на которую опирается угол BAC . Ответ дайте в градусах.

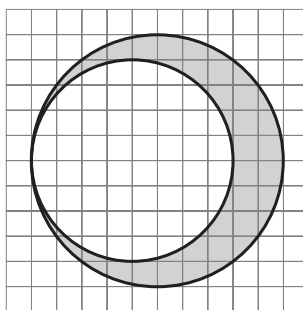
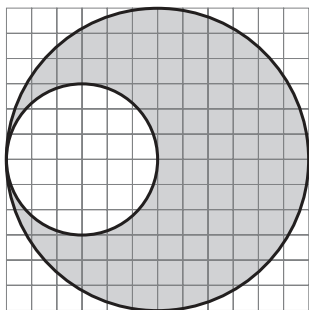


б) Найдите градусную меру дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC . Ответ дайте в градусах.

A16. На клетчатой бумаге изображены два круга. Найдите площадь закрашенной фигуры, если площадь внутреннего круга равна:

а) 1;

б) 16.



Уровень В

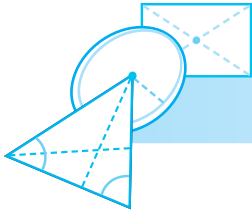
- В1.** Вершина A выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является центром окружности, проходящей через точки B , C и D . Найдите угол BAD , если углы ABC и ADC равны соответственно:
- а) 34° и 41° ; б) 27° и 35° .
- В2.** а) Найдите площадь прямоугольной трапеции, боковые стороны которой равны 10 см и 16 см, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность.
- б) Найдите площадь прямоугольной трапеции, боковые стороны которой равны 12 см и 18 см, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность.
- В3.** а) В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 5 см.
- б) Около параллелограмма, одна из диагоналей которого равна 7 см, описана окружность. Найдите вторую диагональ параллелограмма.
- В4.** а) В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 16 см, вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции.
- б) Около трапеции, один из углов которой равен 37° , описана окружность. Найдите остальные углы трапеции.
- В5.** а) В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Найдите угол ACD , если углы BAD и ADB равны 73° и 37° соответственно.
- б) В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Найдите угол BAD , если углы ACD и ADB равны 64° и 46° соответственно.

Уровень С

- С1.** В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны:
- а) 13 , 7 и 5 ; б) 13 , 6 и 5 .

- C2.** В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если:
- $AD = 8$, $BC = 4$;
 - $AD = 14$, $BC = 7$.
- C3.** а) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 18 и 6 соответственно, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 10$.
- б) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 33 и 11 соответственно, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 20$.
- C4.** а) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Найдите величину угла при вершине A четырёхугольника, если углы DBC и CDB равны 53° и 64° соответственно.
- б) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DBC и DAC равны. Найдите величину угла при вершине D четырёхугольника, если углы BAC и BCA равны 42° и 37° соответственно.
- C5.** а) В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна 4 см, угол C равен 15° . Окружность, описанная около треугольника ABD , касается прямой CD . Найдите площадь параллелограмма.
- б) В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC равна 6 см, угол B равен 75° . Окружность, описанная около треугольника ACD , касается прямой BC . Найдите площадь параллелограмма.
- C6.** а) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны $30\sqrt{2}$ см и $20\sqrt{2}$ см соответственно, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 10$ см.
- б) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны $25\sqrt{2}$ см и $5\sqrt{2}$ см соответственно, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки C и D и касающейся прямой AB , если $CD = 20$ см.

- С7.** а) Вершины четырёхугольника $ABCD$ делят длину описанной около него окружности в отношении $AB : BC : CD : DA = 1 : 5 : 2 : 10$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $AC = 5$ см, $BD = 8$ см.
- б) Вершины четырёхугольника $ABCD$ делят длину описанной около него окружности в отношении $AB : BC : CD : DA = 1 : 12 : 5 : 18$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $AC = 7$ см, $BD = 4$ см.
- С8.** а) Точки $A(1; 2)$, $B(5; 3)$ и $D(1; 18)$ являются тремя вершинами трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC . Известно, что около трапеции можно описать окружность. Найдите площадь трапеции.
- б) Точки $A(3; 2)$, $B(4; 7)$ и $C(16; 7)$ являются тремя вершинами трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC . Известно, что около трапеции можно описать окружность. Найдите площадь трапеции.



Стереометрия

Глава 4. Прямые, плоскости, призмы

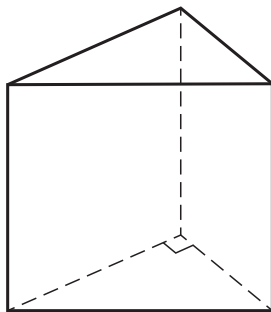
4.1. Призма, её элементы. Правильная треугольная призма

Уровень А

- A1.** а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2. Найдите угол между прямыми CC_1 и BA_1 . Ответ дайте в градусах.
- б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите угол между прямыми BB_1 и CA_1 . Ответ дайте в градусах.
- A2.** а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = \sqrt{3}AA_1$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1 . Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AA_1 = \sqrt{3}AB$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1 . Ответ дайте в градусах.
- A3.** а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите угол ACA_1 , если боковое ребро BB_1 равно 10, а высота одного из оснований равна 15. Ответ дайте в градусах.
- б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите угол AB_1A_1 , если боковое ребро AA_1 равно 6, а высота одного из оснований равна $3\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.
- A4.** а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, точка M — середина ребра BC . Найдите косинус угла AMA_1 , если боковое ребро CC_1 равно 4, а сторона основания равна $2\sqrt{3}$.

- б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, точка M_1 — середина ребра B_1C_1 . Найдите косинус угла AM_1A_1 , если боковое ребро BB_1 равно $2\sqrt{7}$, а сторона основания равна $4\sqrt{3}$.
- A5.** а) Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой H_1 — основание высоты C_1H_1 прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$ с гипотенузой A_1B_1 . Найдите тангенс угла C_1CH_1 , если боковое ребро CC_1 равно 24, а катеты треугольника $A_1B_1C_1$ равны 7 и 24.
- б) Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой H_1 — основание высоты C_1H_1 прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$ с гипотенузой A_1B_1 . Найдите тангенс угла C_1CH_1 , если боковое ребро AA_1 равно $\frac{10}{13}$, а катеты треугольника $A_1B_1C_1$ равны 5 и 12.
- A6.** а) Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник ABC , $AC = BC = \sqrt{79}$. Найдите угол между плоскостями ABC и CA_1B_1 , если боковое ребро AA_1 равно 5, а сторона основания AB равна 4. Ответ дайте в градусах.
- б) Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник ABC , $AC = BC = \sqrt{10}$. Найдите угол между плоскостью CA_1B_1 и плоскостью основания, если боковое ребро AA_1 равно 3, а сторона основания AB равна 2. Ответ дайте в градусах.
- A7.** а) Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 45^\circ$. Найдите угол между плоскостями BAA_1 и CAA_1 , если в основании призмы лежит правильный треугольник ABC . Ответ дайте в градусах.
- б) Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$. Найдите угол между плоскостями BAA_1 и CAA_1 , если в основании призмы лежит правильный треугольник ABC . В ответе укажите косинус этого угла.
- A8.** а) Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежат правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Найдите синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания, если высота призмы равна 3, а боковое ребро равно 10.

- б) Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежат правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Найдите синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания, если высота призмы равна 6, а боковое ребро равно 8.
- A9.** Дана наклонная призма $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания, если:
- боковое ребро равно $2\sqrt{5}$, а высота призмы равна 2;
 - боковое ребро равно $\sqrt{26}$, а высота призмы равна 5.
- A10.** а) Ребро B_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярно плоскости грани AA_1C_1C и равно 18, точка E — середина ребра A_1B_1 . Найдите расстояние от точки E до плоскости грани AA_1C_1C .
- б) Ребро B_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярно плоскости грани AA_1C_1C и равно 22, точка E — середина ребра A_1B_1 . Найдите расстояние от точки E до плоскости грани AA_1C_1C .
- A11.** а) Боковые рёбра призмы образуют с плоскостью основания углы в 30° и равны 6. Найдите высоту призмы.
- б) Боковые рёбра призмы образуют с плоскостью основания углы в 60° и равны $4\sqrt{3}$. Найдите высоту призмы.
- A12.** Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Найдите высоту призмы, если площадь её поверхности равна:
- 36;
 - 132.



- A13.** а) Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 8. Какой станет площадь поверхности призмы, если все её рёбра увеличатся в 4 раза, а форма останется прежней?

б) Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 3. Какой станет площадь поверхности призмы, если все её рёбра увеличатся в 2 раза, а форма останется прежней?

A14. а) Площадь полной поверхности призмы на 24 см^2 больше площади её боковой поверхности. Найдите площадь основания призмы. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

б) Площадь боковой поверхности призмы на 36 см^2 меньше площади её полной поверхности. Найдите площадь основания призмы. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

A15. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, если:

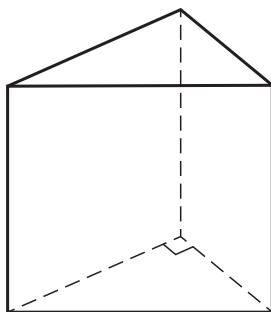
а) сторона её основания равна 8, а высота — 5;

б) сторона её основания равна 3, а высота — 2.

A16. а) Найдите площадь боковой поверхности прямой треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 12, если высота призмы равна 10.

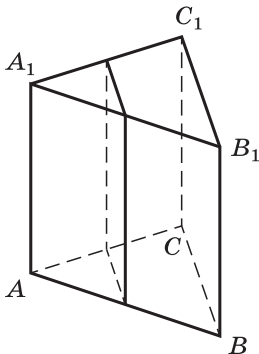
б) Найдите площадь боковой поверхности прямой треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетом 5 и гипотенузой 13, если высота призмы равна 2.

A17. а) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, высота призмы равна 2. Найдите площадь её поверхности.



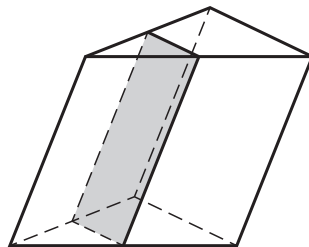
б) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12, высота призмы равна 10. Найдите площадь её поверхности.

- A18.** а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 16, боковые рёбра равны 7. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .



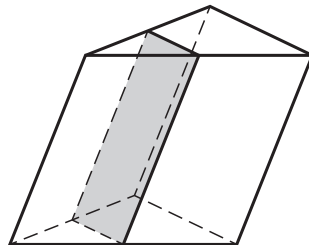
- б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 2, боковые рёбра равны 14. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .

- A19.** Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы, если площадь боковой поверхности призмы равна:



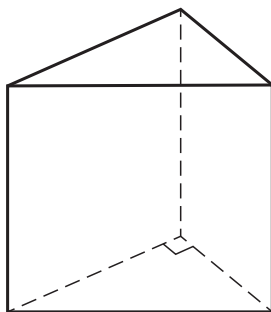
- а) 8; б) 60.

- A20.** Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы, если площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна:



- а) 1; б) 14.

- A21.** а) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 8, объём призмы равен 80. Найдите боковое ребро призмы.

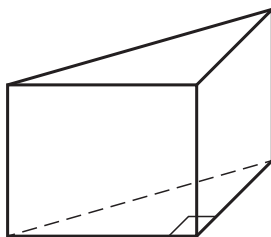


- б) Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 2 и 7, объём призмы равен 42. Найдите боковое ребро призмы.

- A22.** Найдите объём правильной треугольной призмы, если:

- а) сторона основания равна 2, а боковые рёбра равны $\sqrt{3}$;
б) сторона основания равна 6, а боковые рёбра равны $2\sqrt{3}$.

- A23.** а) Найдите объём прямой треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 6, если высота призмы равна 9.

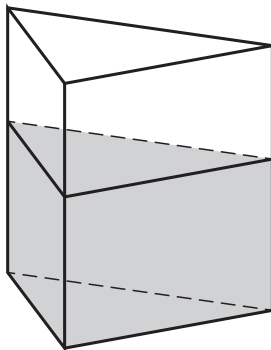


- б) Найдите объём прямой треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетом 7 и гипотенузой 25, если высота призмы равна 2.

- A24.** а) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 5, а гипотенуза равна $5\sqrt{2}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 4.

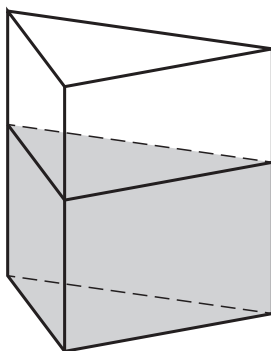
б) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 2, а гипотенуза равна $\sqrt{53}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 3.

- A25. а) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.



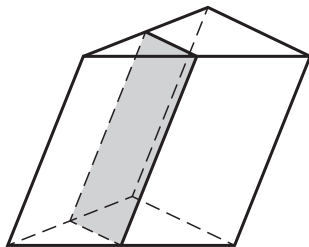
б) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 8 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.

- A26. а) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1200 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 24 см до отметки 26 см. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах.



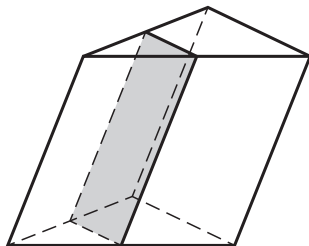
б) В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2400 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

- A27.** а) Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 44, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.



б) Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 28, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

- A28.** Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен:
а) 8; б) 12.



- A29.** а) Найдите объём призмы, если в её основании лежит четырёхугольник, площадь которого равна 5, а боковые рёбра равны $4\sqrt{2}$ и наклонены к плоскости основания под углом 45° .
б) Найдите объём призмы, если в её основании лежит пятиугольник, площадь которого равна 8, а боковые рёбра равны $3\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 60° .

А30. а) Найдите объём призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 4, а боковые рёбра равны $4\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30° .

б) Найдите объём призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые рёбра равны 6 и наклонены к плоскости основания под углом 60° .

Уровень В

В1. а) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 6\sqrt{2}$ см, $BC = 12$ см. Высота призмы равна 16 см, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки A до плоскости BMC .

б) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 6\sqrt{2}$ см, $BC = 12$ см. Высота призмы равна 16 см, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BMC .

В2. а) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см. Высота призмы равна 21 см, точка M делит ребро AA_1 в отношении $AM : MA_1 = 3 : 4$. Найдите расстояние от точки K — середины ребра B_1C_1 — до плоскости BMC .

б) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см. Высота призмы равна 21 см, точка M делит ребро AA_1 в отношении $AM : MA_1 = 3 : 4$. Найдите расстояние от точки P — середины ребра A_1B_1 — до плоскости BMC .

В3. а) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC , в котором $AB = 12$ см, $BC = 16$ см, $\angle ABC = 90^\circ$. Высота призмы равна 18 см, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости BMC .

- б) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC , в котором $AB = 12$ см, $BC = 16$ см, $\angle ABC = 90^\circ$. Высота призмы равна 18 см, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от середины ребра A_1B_1 до плоскости BMC .
- В4.** а) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $4\sqrt{3}$ см, высота призмы равна 16 см, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки K — середины ребра B_1C_1 — до плоскости BMC .
- б) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $4\sqrt{3}$ см, высота призмы равна 16 см, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки K — середины ребра A_1B_1 — до плоскости BMC .
- В5.** а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .
- б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Найдите расстояние между прямыми BB_1 и A_1C .
- В6.** а) Плоскость α проходит через сторону AB основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и середину ребра B_1C_1 . Пусть M — точка пересечения плоскости α с прямой CC_1 . Докажите, что точка C_1 — середина отрезка CM . Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если все рёбра призмы равны 4.
- б) Плоскость α проходит через сторону AB основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и середину ребра B_1C_1 . Пусть M — точка пересечения плоскости α с прямой CC_1 . Докажите, что точка C_1 — середина отрезка CM . Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если все рёбра призмы равны 8.
- В7.** а) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $4\sqrt{3}$ см, высота призмы равна 16 см, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C_1 .

б) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $4\sqrt{3}$ см, высота призмы равна 16 см, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние между прямыми MB и A_1P , где P — середина ребра C_1C .

B8. а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через ребро BC и центр основания $A_1B_1C_1$.

б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, параллельной ребру BC , проходящей через точку A и центр основания $A_1B_1C_1$.

B9. а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через прямую BC_1 параллельно медиане AM основания ABC , если все рёбра призмы равны 2.

б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через прямую BC_1 параллельно медиане AM основания ABC , если сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а высота призмы — $3\sqrt{3}$.

Уровень С

C1. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC , в котором $AB = 12$ см, $BC = 5$ см, $\angle ABC = 90^\circ$. Высота призмы равна 8 см, точка M — середина ребра A_1B_1 , точка E — середина ребра A_1C_1 . Найдите расстояние до плоскости BME от:

а) F — точки пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$;

б) O — точки пересечения прямых BC_1 и B_1C .

C2. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC , в котором $AB = 12$ см, $BC = 5$ см, $\angle ABC = 90^\circ$. Высота призмы равна 16 см, точка M — середина ребра A_1B_1 , точка E — середина ребра A_1C_1 , точка T — середина ребра BB_1 . Найдите расстояние до плоскости TME от:

- а) F — точки пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$;
 б) O — точки пересечения прямых AC_1 и A_1C .
- С3.** Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A , а боковая грань AA_1C_1C — квадрат. Докажите, что прямые CB_1 и AC_1 перпендикулярны. Найдите расстояние между этими прямыми, если:
- а) $AC = 2$, $AB_1 = 2\sqrt{3}$;
 б) $AC = 4$, $AB_1 = 4\sqrt{3}$.
- С4.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение плоскостью, проходящей через середину M ребра AB , точку B_1 и точку K , лежащую на ребре AC и делящую его в отношении $AK : KC = 1 : 3$. Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра A_1C_1 . Найдите площадь сечения, если:
- а) сторона основания призмы равна $4\sqrt{2}$, а высота призмы равна $8\sqrt{2}$;
 б) сторона основания призмы равна $8\sqrt{2}$, а высота призмы равна $16\sqrt{2}$.
- С5.** Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $8\sqrt{3}$ см, высота призмы равна 21 см, точка M делит ребро AA_1 в отношении $AM : MA_1 = 3 : 4$. Найдите угол между плоскостью BMC и прямой:
- а) KM , где K — середина ребра B_1C_1 ;
 б) PM , где P — середина ребра A_1B_1 .
- С6.** Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $10\sqrt{3}$ см, высота призмы равна 10 см, точка M — середина ребра A_1B_1 , точка E — середина ребра A_1C_1 , точка P — середина ребра AB . Найдите угол между плоскостью BME и прямой:
- а) PM ; б) PC .
- С7.** а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- 1) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
 - 2) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .
 - б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .
 - 1) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
 - 2) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .
- С8.** а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6. Точки M , N и P — центры граней ABC , AA_1B_1B и BB_1C_1C соответственно. Угол между плоскостью MNP и плоскостью основания равен 60° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNP .
- б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 12. Точки M , N и P — центры граней ABC , AA_1B_1B и BB_1C_1C соответственно. Угол между плоскостью MNP и плоскостью основания равен 30° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNP .
- С9.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка D — середина ребра CC_1 . Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1 , если известно, что:
- а) сторона основания призмы равна 1, а её боковое ребро — 3;
 - б) сторона основания призмы равна 2, а её боковое ребро — 4.
- С10.** а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L . Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ . Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .
- б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 18, а боковое ребро AA_1 равно 9. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 3$. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L . Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ . Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

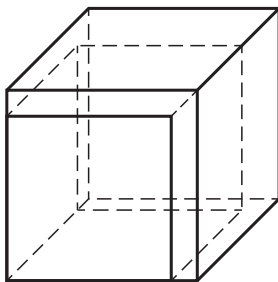
- C11.** а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 2$. Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат. Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .
- б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$. Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат. Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .
- C12.** а) В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 8. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая рёбра BB_1 и CC_1 в точках M и N соответственно, где M — середина ребра BB_1 , а AN является биссектрисой угла CAC_1 . Найдите объём многогранника $ABCNM$.
- б) В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро AA_1 равно 16. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая рёбра BB_1 и CC_1 в точках M и N соответственно, где M — середина ребра BB_1 , а AN является биссектрисой угла CAC_1 . Найдите объём многогранника $ABCNM$.
- C13.** а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L . Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ . Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .
- б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно 6. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 4$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L . Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ . Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

4.2. Куб

Уровень А

- A1.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми:
а) AA_1 и BC_1 ;
б) BA_1 и DC_1 .
Ответ дайте в градусах.
- A2.** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми:
а) BA_1 и $A_1 C_1$;
б) AD_1 и BD .
Ответ дайте в градусах.
- A3.** а) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K — середина ребра CC_1 , точка L — середина ребра $B_1 C_1$, точка M — середина ребра $C_1 D_1$. Найдите угол MKL . Ответ дайте в градусах.
б) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K — середина ребра AB , точка L — середина ребра AD , точка M — середина ребра AA_1 . Найдите угол MKL . Ответ дайте в градусах.
- A4.** а) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами сторон BC и $A_1 B_1$. Найдите косинус угла $MC_1 N$.
б) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки K , L , M и N являются серединами сторон BC , CC_1 , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми KL и MN . Ответ дайте в градусах.
- A5.** а) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите тангенс угла между плоскостью ADA_1 и плоскостью, проходящей через середины рёбер AD , $A_1 D_1$ и CC_1 .
б) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку A_1 и середины рёбер BB_1 и CC_1 .
- A6.** а) Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $7\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины B до плоскости $A_1 DC$.
б) Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $8\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины C до плоскости $D_1 AB$.
- A7.** а) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны $\sqrt{24}$. Найдите расстояние от точки D до прямой $A_1 C_1$.
б) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой BA_1 .

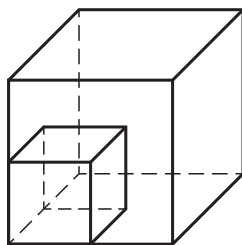
- A8.** а) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 30. Найдите ребро куба.



- б) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 90. Найдите ребро куба.

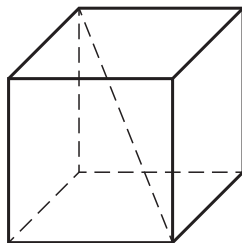
- A9.** Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить:

- а) в 3 раза;
б) в 2 раза?



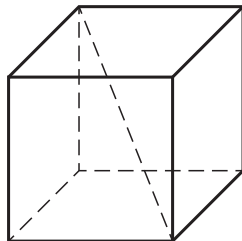
- A10.** Найдите площадь поверхности куба, если его диагональ равна:

- а) 4;
б) 6.



- A11.** Найдите диагональ куба, если площадь его поверхности равна:

- а) 18;
б) 36.

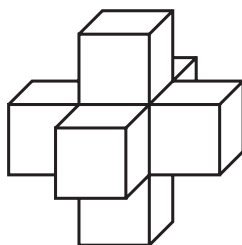


- A12.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите площадь его поверхности, если площадь четырёхугольника $ABC_1 D_1$ равна:

- а) $9\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{2}$.

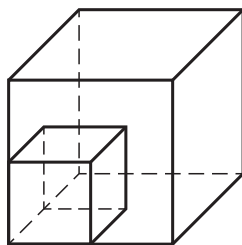
A13. Найдите площадь поверхности пространственного креста, изображённого на рисунке и составленного из:

- а) единичных кубов;
- б) кубов с ребром 2.



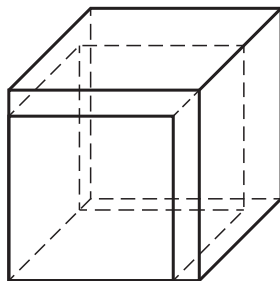
A14. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить:

- а) в 3 раза;
- б) в 5 раз?



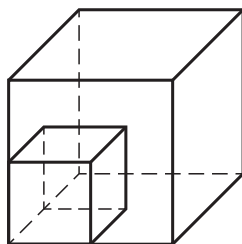
A15. а) Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объём увеличится на 61. Найдите ребро куба.

- б) Если каждое ребро куба увеличить на 2, то его объём увеличится на 56. Найдите ребро куба.



A16. Во сколько раз площадь поверхности первого куба меньше площади поверхности второго куба, если:

- а) объём первого куба в 8 раз меньше объёма второго куба;
- б) объём первого куба в 27 раз меньше объёма второго куба?



A17. Во сколько раз объём первого куба меньше объёма второго куба, если площадь поверхности первого куба меньше площади поверхности второго куба:

- а) в 9 раз;
- б) в 16 раз?

A18. Найдите объём куба, если его диагональ равна:

- а) $\sqrt{27}$; б) $\sqrt{48}$.

A19. Найдите диагональ куба, если его объём равен:

- а) $24\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$.

A20. Найдите объём куба, если площадь его поверхности равна:

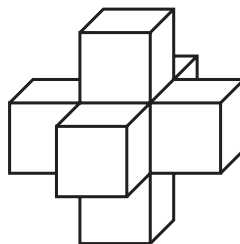
- а) 150; б) 54.

A21. Найдите площадь поверхности куба, если его объём равен:

- а) 8; б) 125.

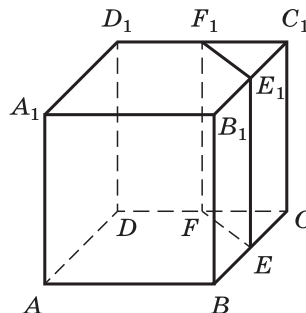
A22. Найдите объём пространственного креста, изображённого на рисунке и составленного из:

- а) единичных кубов;
б) кубов с ребром 2.



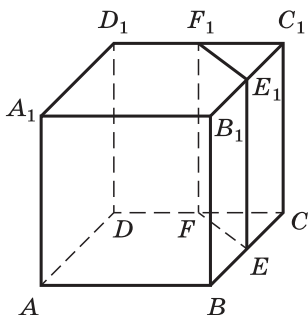
A23. а) Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 2. Найдите объём куба.

б) Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 3. Найдите объём куба.



A24. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, если объём куба равен:

- а) 56; б) 72.



Уровень В

- B1.** а) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6. Точки M и N — центры граней $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $B_1 C_1 CB$ соответственно. Плоскость AMN пересекается с ребром $B_1 C_1$ в точке E . Найдите $B_1 E$.
- б) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6. Точки M и N — центры граней $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $B_1 C_1 CB$ соответственно. Плоскость AMN пересекается с ребром $B_1 C_1$ в точке E . Найдите $C_1 E$.
- B2.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 2. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через:
- а) диагональ AC_1 параллельно прямой BD ;
- б) диагональ AB_1 параллельно прямой BD .
- B3.** а) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 4. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через середины рёбер AD , DD_1 и $C_1 D_1$.
- б) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 6. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно прямым BD и BC_1 .

- В4.** Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 12 см, точка M — середина ребра $A_1 B_1$, точка N — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние:
- от точки A до плоскости $D_1 MN$;
 - от точки B_1 до плоскости $D_1 MN$;
- В5.** Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6 см, точка M — середина ребра AD , точка N — середина ребра AB . Найдите расстояние:
- от точки A до плоскости $B_1 MN$;
 - от точки C_1 до плоскости $B_1 MN$.
- В6.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между плоскостями:
- ABC и $CB_1 D_1$;
 - $A_1 BC_1$ и $A_1 C_1 C$.
- В7.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между плоскостями:
- $BA_1 C_1$ и $AB_1 D_1$;
 - $A_1 C_1 D$ и $A_1 C_1 B$.
- В8.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите углы между:
- прямой AB и плоскостью $CB_1 D_1$;
 - прямой AC и плоскостью $CB_1 D_1$.
- В9.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, все рёбра которого равны 2. Найдите расстояние между диагональю куба AC_1 и:
- прямой BD ;
 - прямой, проходящей через середины рёбер BC и AD .
- В10.** а) Точка M — середина ребра CD единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через вершину A_1 проведена плоскость, параллельная прямым AM и $D_1 M$. Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра AB . Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.
- б) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра CD . Через вершину A_1 проведена плоскость, параллельная прямым AM и $D_1 M$. Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра AB . Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

Уровень С

- С1.** Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $2\sqrt{6}$ см, точка M — середина ребра $A_1 B_1$. Найдите расстояние до плоскости $AD_1 M$ от точки:
- а) P — середины ребра AD ;
 - б) F — середины ребра BB_1 .
- С2.** Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $2\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние до плоскости $AD_1 B_1$ от:
- а) точки P — середины ребра AB ;
 - б) F — точки пересечения прямых BC_1 и $B_1 C$.
- С3.** а) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 . Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$. Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.
- б) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 8. На его ребре DD_1 отмечена точка M так, что $MD = 6$. Через точки M и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой DB_1 . Докажите, что $A_1 N : ND_1 = 2 : 1$, где N — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 D_1$. Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $DD_1 C_1 C$.
- С4.** Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Определите площадь фигуры, получившейся в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно:
- а) 2;
 - б) $2\sqrt[4]{3}$.
- С5.** Через середину ребра AB куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость, параллельная прямым BD_1 и $A_1 C_1$. Докажите, что эта плоскость делит диагональ DB_1 в отношении $3 : 5$, считая от вершины D . Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно:
- а) 4;
 - б) 8.

4.3. Прямоугольный параллелепипед

Уровень А

- А1.** а) Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. Ответ дайте в градусах.
- б) Найдите угол $CD_1 B$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = \sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.
- А2.** а) Найдите угол DBD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 5$, $AD = 12$, $AA_1 = 13$. Ответ дайте в градусах.
- б) Найдите угол $AC_1 A_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$, $AA_1 = 1$. Ответ дайте в градусах.
- А3.** а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ AC_1 равна 10, а боковое ребро BB_1 равно $\sqrt{19}$. Найдите синус угла $BD_1 D$.
- б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ BD_1 равна 15, а боковое ребро CC_1 равно $6\sqrt{6}$. Найдите косинус угла ACA_1 .
- А4.** а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер $AB = 8$, $AD = 11$, $AA_1 = 6$. Найдите синус угла между прямыми AB_1 и CD_1 .
- б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер $AB = 7$, $AD = 3$, $AA_1 = 6$. Найдите синус угла между прямыми CB_1 и AD_1 .
- А5.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер AB , AD и AA_1 . Найдите синус угла между прямыми CD и $A_1 C_1$, если:
- а) $AB = 8$, $AD = 6$, $AA_1 = 18$;
- б) $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 26$.

- A6.** а) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AC_1 = 2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и $A_1 C$. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BD_1 = 2AD$. Найдите угол между диагоналями $B_1 D$ и AC_1 . Ответ дайте в градусах.
- A7.** а) Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 24$, $BC = 7$. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой CC_1 , если высота параллелепипеда равна 40, а боковое ребро — 50.
- б) Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 45$, $BC = 24$. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой CC_1 , если высота параллелепипеда равна 20, а боковое ребро — 34.
- A8.** а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны диагональ и длины рёбер: $BD_1 = 23$, $A_1 B_1 = 22$, $BC = 6$. Найдите длину ребра DD_1 .
- б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны диагональ и длины рёбер: $BD_1 = 21$, $CD = 4$, $A_1 D_1 = 8$. Найдите длину ребра AA_1 .
- A9.** а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AA_1 = 6$, $AB = 12$, $AD = 4$. Найдите длину диагонали $A_1 C$.
- б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $CC_1 = 9$, $AB = 2$, $B_1 C_1 = 6$. Найдите длину диагонали BD_1 .
- A10.** Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его рёбра равны:
- а) 1, 4, 6;
- б) 2, 3, 5.
- A11.** а) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 6. Диагональ параллелепипеда равна 9. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.
- б) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Диагональ параллелепипеда равна 11. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

A12. а) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 8, а диагональ AC_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки B , B_1 и D .

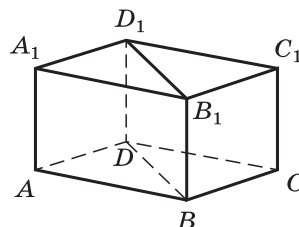
б) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 15, а диагональ BD_1 равна 25. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .

A13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер CD , BC и CC_1 . Точка K — середина ребра DD_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1 , B_1 и K , если:

а) $CD = 2$, $BC = \sqrt{5}$, $CC_1 = 2$;

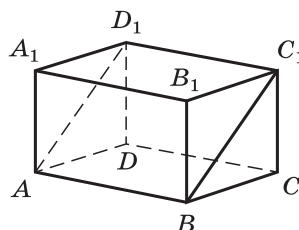
б) $CD = 4$, $BC = \sqrt{17}$, $CC_1 = 2$.

A14. а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 5$, $AD = 12$, $AA_1 = 5$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины B , B_1 и D .



б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 20$, $AD = 15$, $AA_1 = 3$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D , D_1 и B .

A15. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер AB , AD и AA_1 . Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 , если:



а) $AB = 2$, $AD = 27$, $AA_1 = 36$;

б) $AB = 5$, $AD = 14$, $AA_1 = 48$.

A16. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной призмы, если:

а) сторона её основания равна 13, а площадь поверхности равна 702;

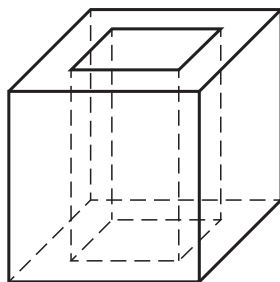
б) сторона её основания равна 2, а площадь поверхности равна 176.

A17. а) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно $\sqrt{10}$, а сторона основания равна 8. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A_1 , C_1 и середину ребра AB .

б) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$, а сторона основания равна 6. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и середину ребра $B_1 C_1$.

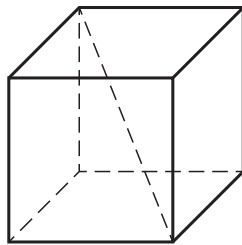
A18. а) Из единичного куба вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности получившегося после вырезания многогранника.

б) Из куба с ребром 3 вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 2,5 и боковым ребром 3. Найдите площадь поверхности получившегося после вырезания многогранника.



A19. а) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 2. Диагональ параллелепипеда равна 3. Найдите объём параллелепипеда.

б) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4 и 2. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите объём параллелепипеда.



- A20.** а) Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 13. Найдите объём призмы, если её высота равна 12.
- б) Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 17. Найдите объём призмы, если её высота равна 8.
- A21.** а) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 9 и 7. Объём параллелепипеда равен 189. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.
- б) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 7 и 4. Объём параллелепипеда равен 140. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.
- A22.** а) Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 8 и 2, а его объём равен 144. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.
- б) Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 4, а его объём равен 240. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.
- A23.** а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рёбра DA , DC и диагональ боковой грани DA_1 равны 3, 5 и $\sqrt{34}$ соответственно. Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рёбра BC , BA и диагональ боковой грани BC_1 равны 2, 3 и $2\sqrt{5}$ соответственно. Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- A24.** Найдите объём прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором:
- а) $AD = 1$, $AD_1 = \sqrt{10}$, $BD_1 = \sqrt{14}$;
- б) $BC = 3$, $BC_1 = 5$, $AC_1 = \sqrt{29}$.
- A25.** а) Одна из граней прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 12 и образует с плоскостью этой грани угол 30° . Найдите объём параллелепипеда.
- б) Одна из граней прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 8 и образует с плоскостью этой грани угол 30° . Найдите объём параллелепипеда.

Уровень В

- В1.** а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой $A_1 B_1$ и плоскостью $AB_1 D_1$.
- б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 2$, $AD = 3$. Найдите угол между прямой $A_1 D_1$ и плоскостью $AB_1 D_1$.
- В2.** а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 7$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $3 : 4$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .
- б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 3$, $AD = 5$, $AA_1 = 8$. Точка M принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $3 : 5$, считая от вершины D . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , M и C_1 .
- В3.** а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 3$, $AA_1 = 8$. Точка R принадлежит ребру AA_1 и делит его в отношении $3 : 5$, считая от вершины A . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B , R и D_1 .
- б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 6$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$. Точка F принадлежит ребру AA_1 и делит его в отношении $3 : 5$, считая от вершины A . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B_1 , F и D .
- В4.** а) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 4$. Точка T делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 T : TC_1 = 4 : 8$. Найдите, в каком отношении, считая от вершины B_1 , плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 .
- б) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 2$. Точка T делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 T : TC_1 = 3 : 12$. Найдите, в каком отношении, считая от вершины B_1 , плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 .

- В5.** а) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .
- б) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 2. Точка E — середина ребра AA_1 . Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .
- В6.** а) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 5, а боковое ребро $AA_1 = 1$. Точка P принадлежит ребру $A_1 D_1$ и делит его в отношении $4 : 1$, считая от вершины A_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и P .
- б) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 14, а боковое ребро $AA_1 = \sqrt{17}$. Точка M принадлежит ребру $A_1 B_1$ и делит его в отношении $4 : 3$, считая от вершины A_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A , D и M .
- В7.** а) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро $AA_1 = 2$. Точка O принадлежит ребру $A_1 B_1$ и делит его в отношении $4 : 1$, считая от вершины A_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и O .
- б) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 22, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении $6 : 5$, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .
- В8.** а) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L . Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ . Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

б) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{3}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки M и N соответственно, причём $BM = C_1 N = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки M и N . Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ . Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

Уровень С

- С1.** а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 3, а сторона BC — 4. Угол между плоскостью основания и плоскостью сечения, проходящего через точки B , D и A_1 , равен 60° . Найдите объём параллелепипеда.
- б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 15, а сторона BC — 20. Угол между плоскостью основания и плоскостью сечения, проходящего через точки B , D и A_1 , равен 60° . Найдите объём параллелепипеда.
- С2.** а) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 2\sqrt{2}$, $AD = 6$, $AA_1 = 8$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
- б) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 4 : 1$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $AD = 8$, $AA_1 = 10$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
- С3.** а) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 8 : 1$, а на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 4 : 5$. Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 16$, $AA_1 = 18$. Найдите угол между плоскостями EFD_1 и $A_1 B_1 C_1$.
- б) На ребре BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 4$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$. Найдите угол между плоскостями FTD_1 и $AA_1 B_1$.

- С4.** а) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$. Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 . Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.
- б) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 5$, $AA_1 = 8$. Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 . Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.
- С5.** а) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 6 : 1$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
- б) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 12 : 1$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = \frac{9\sqrt{2}}{2}$, $AD = 24$, $AA_1 = 26$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
- С6.** а) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 6$. Точка T делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 T : TC_1 = 6 : 4$. Известно, что $AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 70$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
- б) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 5$. Точка T делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 T : TC_1 = 6 : 3$. Известно, что $AB = 2\sqrt{2}$, $AD = 9$, $AA_1 = 54$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

- С7.** а) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 6$. Точка T делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 T : TC_1 = 5 : 9$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 14$, $AA_1 = 98$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
- б) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 4$. Точка T делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 T : TC_1 = 3 : 5$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 8$, $AA_1 = 40$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
- С8.** а) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L . Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ . Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .
- б) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки M и N соответственно, причём $BM = C_1 N = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки M и N . Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ . Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .
- С9.** а) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна $3\sqrt{2}$. Точки K и L — середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью сечения, проходящего через точки D_1 , K и L , если периметр сечения равен 18.
- б) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна $2\sqrt{2}$. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью сечения, проходящего через точки D_1 , M и N , если периметр сечения равен 12.

4.4. Произвольный параллелепипед

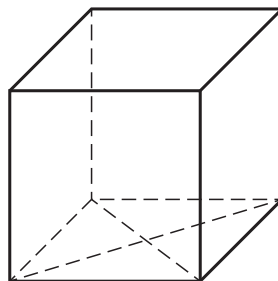
Уровень А

А1. а) Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, в котором $AC = 12$. Найдите угол между плоскостями ADB и $AD_1 B_1$, если боковое ребро параллелепипеда равно $6\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

б) Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, в котором $AC = 18$. Найдите угол между плоскостями BCD и $CD_1 B_1$, если боковое ребро параллелепипеда равно $3\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

А2. а) В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 15 и 20. Площадь её поверхности равна 800. Найдите боковое ребро этой призмы.

б) В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 5 и 12. Площадь её поверхности равна 476. Найдите боковое ребро этой призмы.

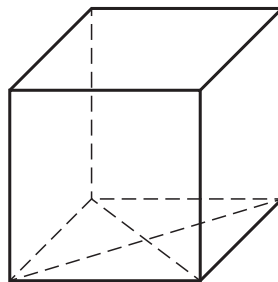


А3. а) Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $A_1 C_1 = 8$, $B_1 D_1 = 6$, $A_1 A = 7$, является ромб $A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

б) Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AC = 24$, $BD = 10$, $A_1 A = 2$, является ромб $ABCD$. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

А4. а) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 5.

б) Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 12 и 5, и боковым ребром, равным 11.



A5. Основанием наклонной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$, а диагональ AC_1 призмы перпендикулярна плоскости основания. Найдите площадь основания призмы, если:

а) $AC_1 = 2\sqrt{7}$, $AA_1 = 6$;

б) $A_1C = 3\sqrt{23}$, $AA_1 = 15$.

A6. а) Основанием параллелепипеда является ромб со стороной 10 и острым углом 45° . Одно из боковых рёбер параллелепипеда составляет с плоскостью этого основания угол 30° и равно $2\sqrt{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

б) Основанием параллелепипеда является ромб со стороной 3 и острым углом 30° . Одно из боковых рёбер параллелепипеда составляет с плоскостью этого основания угол 45° и равно $\sqrt{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

Уровень В

B1. а) Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб со стороной, равной 4, и острым углом A , равным 30° . Найдите расстояние от вершины B_1 призмы до прямой A_1D , если боковое ребро призмы равно 4.

б) Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб со стороной, равной 8, и острым углом A , равным 60° . Найдите расстояние от вершины B_1 призмы до прямой A_1D , если боковое ребро призмы равно 8.

B2. а) Каждая грань параллелепипеда представляет собой ромб с острым углом, равным 60° . Найдите тангенс угла между плоскостью основания и боковым ребром.

б) Каждая грань параллелепипеда представляет собой ромб с острым углом, равным 60° . Найдите тангенс угла между плоскостями, содержащими любые две соседние грани.

Уровень С

- С1.** а) Дана четырёхугольная прямая призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Найдите объём призмы, если известно, что $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle CAC_1 = 60^\circ$, $\angle BDB_1 = 30^\circ$, $AA_1 = 6$.
- б) Дана четырёхугольная прямая призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Найдите объём призмы, если известно, что $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle CAC_1 = 60^\circ$, $\angle BDB_1 = 30^\circ$, $AA_1 = 3$.
- С2.** а) Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб $ABCD$, сторона которого равна 4, а угол BAD равен 120° . Боковое ребро призмы вдвое меньше стороны основания. Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $A_1 B_1 C_1 D_1$, точка K — середина ребра AB . Найдите расстояние от вершины B_1 до плоскости, проходящей через точку K параллельно прямым BO и $D_1 A$.
- б) Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб $ABCD$, сторона которого равна 3, а угол CDA равен 60° . Боковое ребро призмы вдвое меньше стороны основания. Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, точка K — середина ребра $A_1 B_1$. Найдите расстояние от вершины B до плоскости, проходящей через точку K параллельно прямым $B_1 O$ и DA_1 .

4.5. Правильная шестиугольная призма

Уровень А

- А1.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ боковые рёбра равны 10, а рёбра основания равны 5. Найдите угол $BE_1 E$. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 3. Найдите тангенс угла DAD_1 .
- А2.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол $AC_1 A_1$. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 2. Найдите угол $BF_1 F$. Ответ дайте в градусах.

- A3.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ рёбра основания равны 1, а боковые рёбра равны $\sqrt{11}$. Найдите тангенс угла $A_1 D C_1$.
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ рёбра основания равны 3, а боковые рёбра равны $\sqrt{3}$. Найдите тангенс угла $B_1 E D_1$.
- A4.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 32. Найдите расстояние между точками E и C_1 .
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 35. Найдите расстояние между точками C и A_1 .
- A5.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны $9\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B_1 и E .
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны $8\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками C и F_1 .
- A6.** Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, если:
- а) сторона её основания равна 5, а высота — 10;
- б) сторона её основания равна 3, а высота — 2.
- A7.** Найдите объём правильной шестиугольной призмы, если:
- а) стороны её основания равны 8, а боковые рёбра — $\sqrt{3}$;
- б) стороны её основания равны 2, а боковые рёбра — $\sqrt{27}$.

Уровень В

- B1.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 13. Найдите расстояние от точки C до прямой $A_1 F_1$.
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 26. Найдите расстояние от точки A до прямой $E_1 D_1$.

- В2.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 3. Найдите расстояние от точки B до прямой $C_1 D_1$.
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 2. Найдите расстояние от точки B до прямой $A_1 F_1$.
- В3.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости $FB_1 C_1$.
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 2. Найдите расстояние от точки F до плоскости $BD_1 E_1$.
- В4.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние между точками D и F_1 .
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 3. Найдите расстояние между точками A и E_1 .
- В5.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна 2, а высота — 3. Найдите расстояние между точками B и E_1 .
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1 .
- В6.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ рёбра основания равны 2, а высота — $2\sqrt{3}$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, C, E, A_1, C_1, E_1 .
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ рёбра основания равны 5, а высота — $10\sqrt{3}$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, E, B_1, C_1, E_1 .

Уровень С

- C1.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны $2\sqrt{2}$, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости $MB_1 F_1$.
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны $2\sqrt{2}$, точка M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки D до плоскости $MB_1 F_1$.
- C2.** а) Сторона основания шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ равна 15, высота призмы равна 10. Найдите расстояние от середины ребра DD_1 до плоскости $AB_1 F_1$.
- б) Сторона основания шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ равна 15, высота призмы равна 10. Найдите расстояние от середины ребра CC_1 до плоскости $AB_1 F_1$.

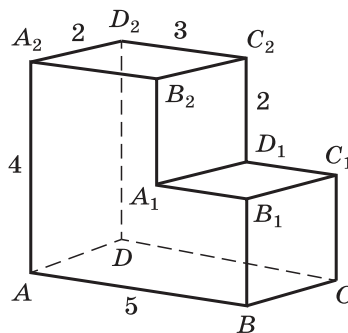
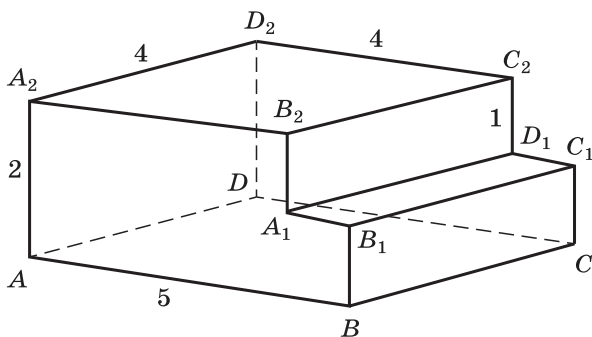
4.6. Произвольные многогранники

Уровень А

- A1.** На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите тангенс:

а) угла $B_2 D_2 C_2$;

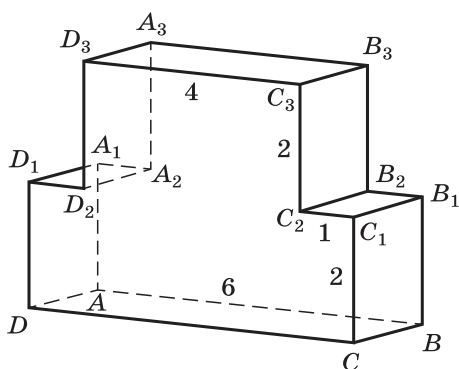
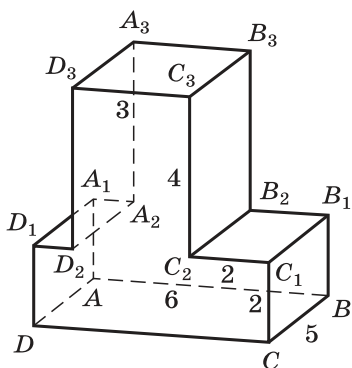
б) угла $CB_1 C$.



A2. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите тангенс:

а) угла AD_1A_1 ;

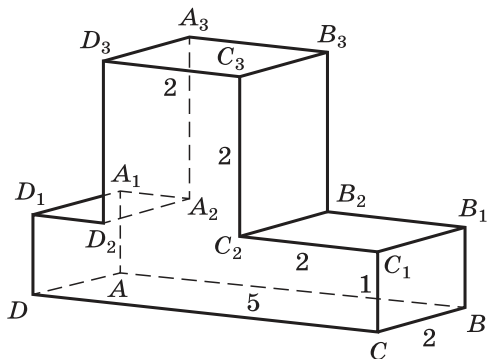
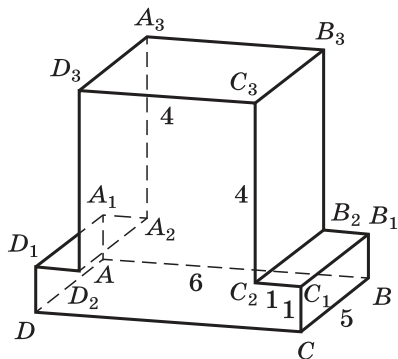
б) угла $D_2A_3D_3$.



A3. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите тангенс:

а) угла BAA_2 ;

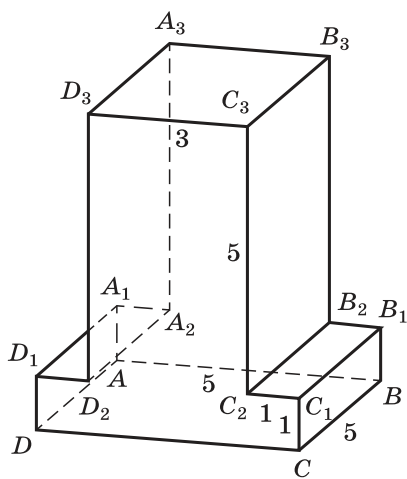
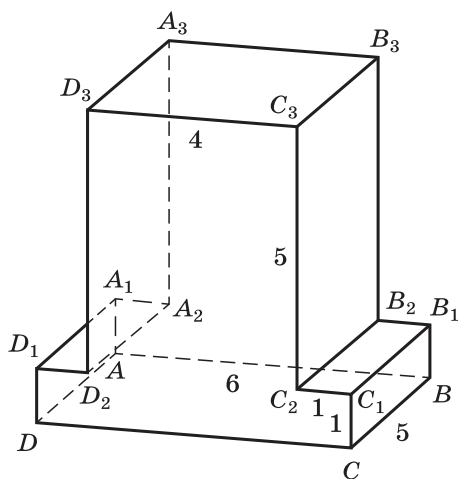
б) угла CDC_1 .



A4. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите тангенс:

а) угла $D_1A_2D_2$;

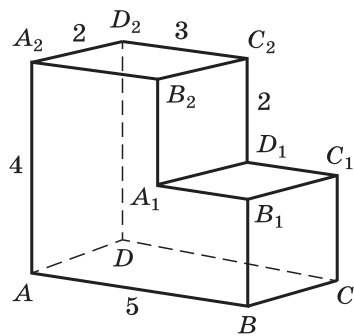
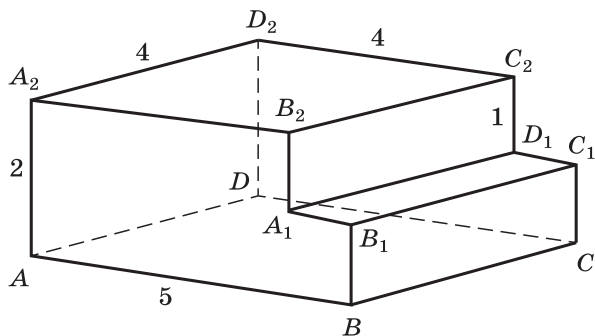
б) угла $B_2B_1C_2$.



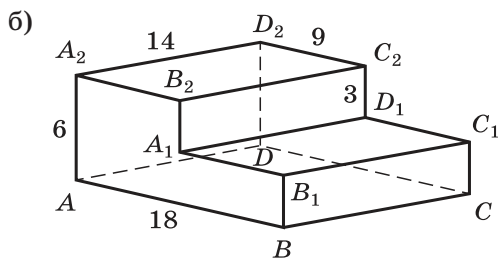
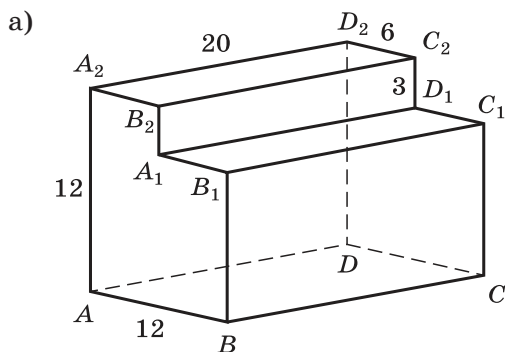
A5. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите расстояние между вершинами:

а) A и C_2 ;

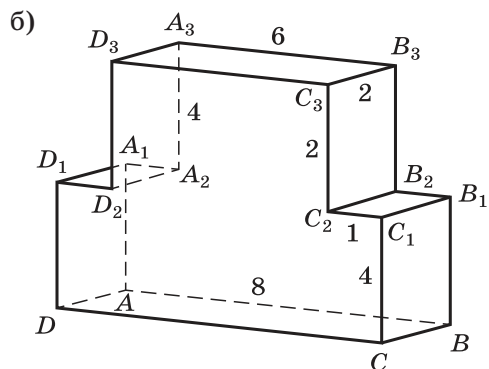
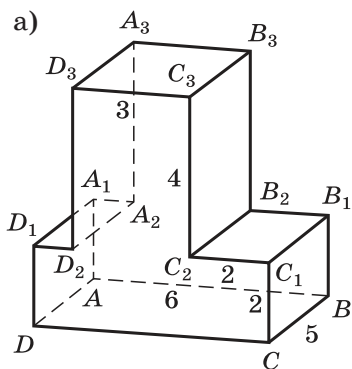
б) A и C_1 .



А6. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите расстояние между вершинами D и B_1 .



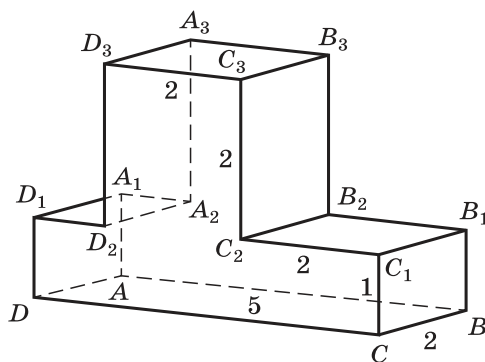
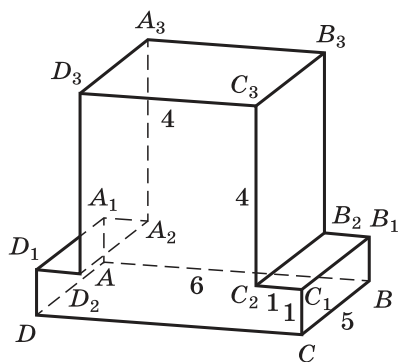
А7. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами A_2 и C_3 .



A8. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами:

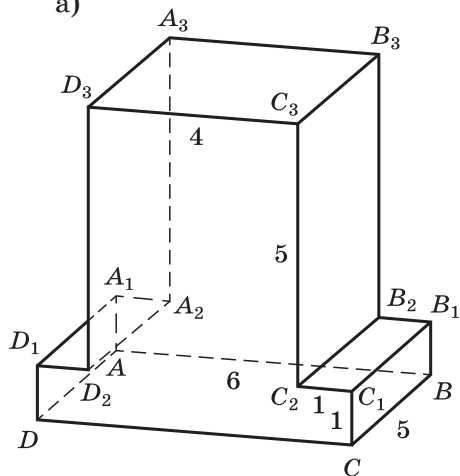
а) B и D_2 ;

б) A и C_2 .

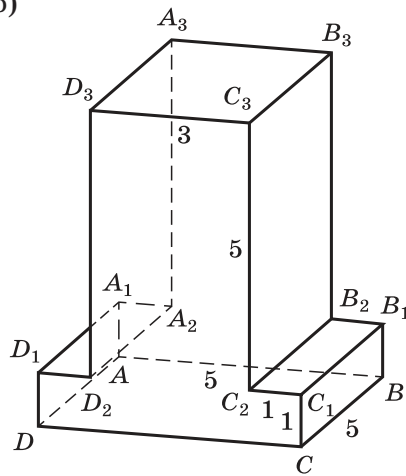


A9. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_3 .

а)



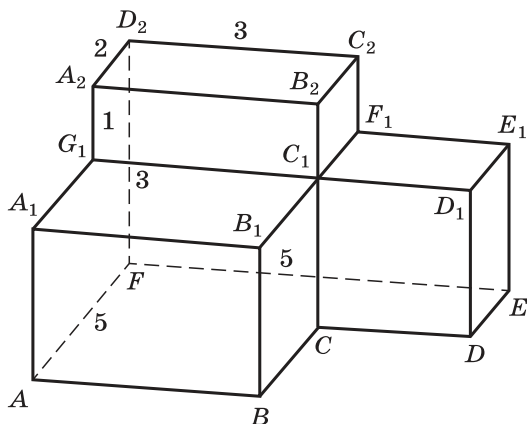
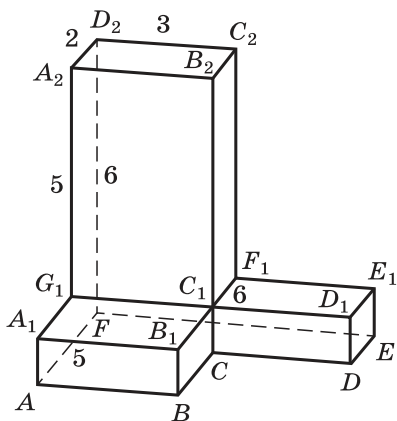
б)



A10. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами:

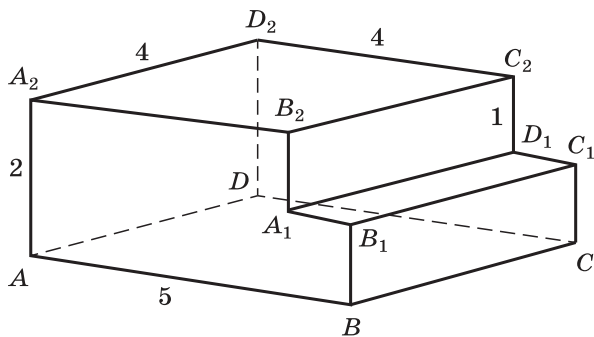
а) A_1 и D ;

б) A и D_1 .

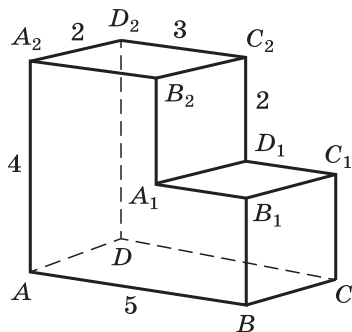


A11. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

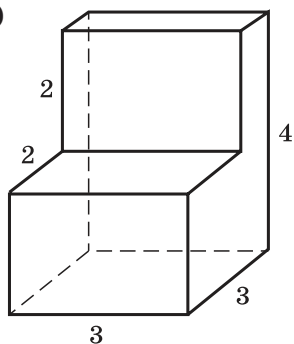


б)

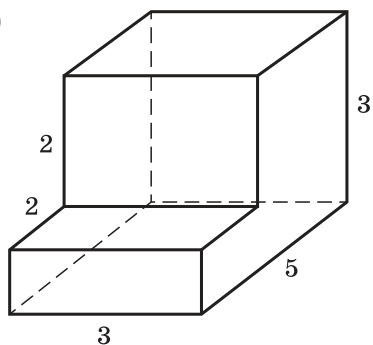


A12. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

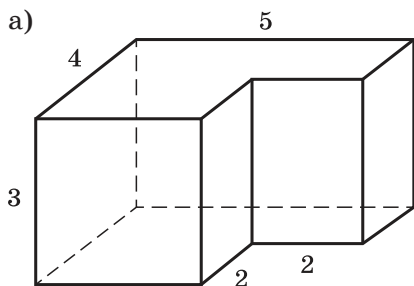


б)

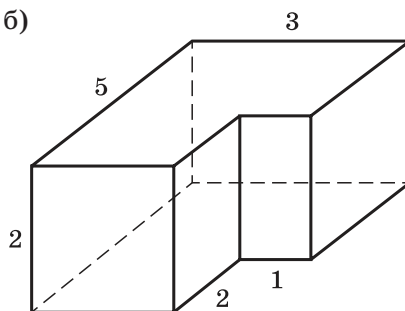


A13. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

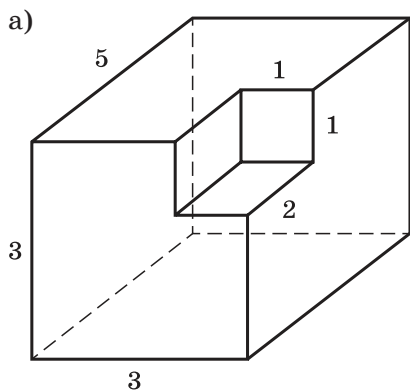


б)

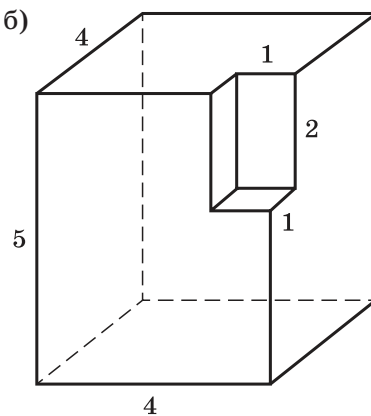


A14. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

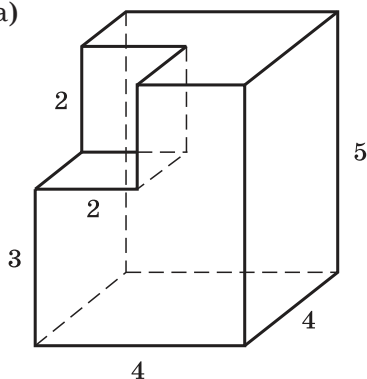


б)

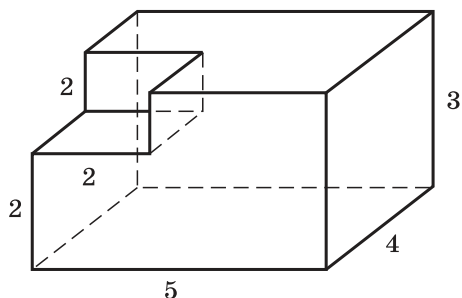


A15. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

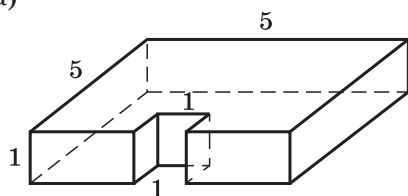


б)

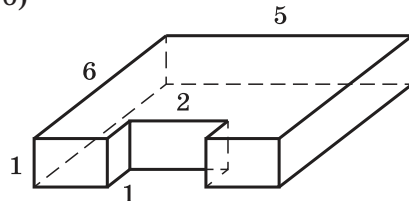


A16. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

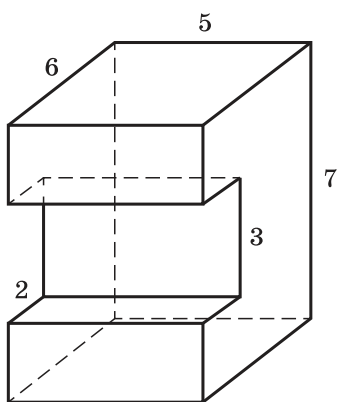


б)

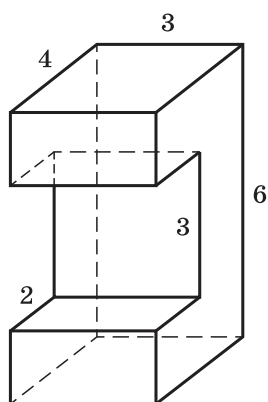


A17. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

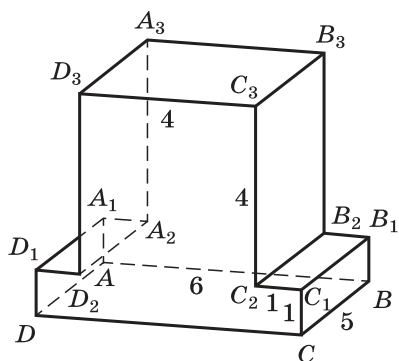


б)

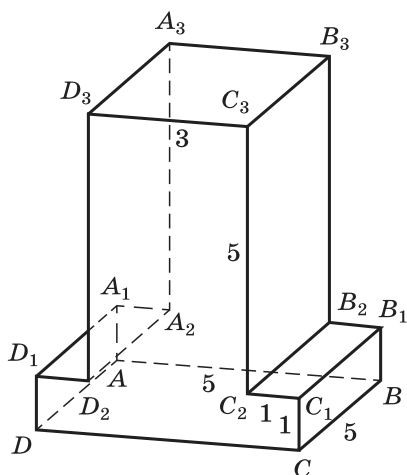


A18. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

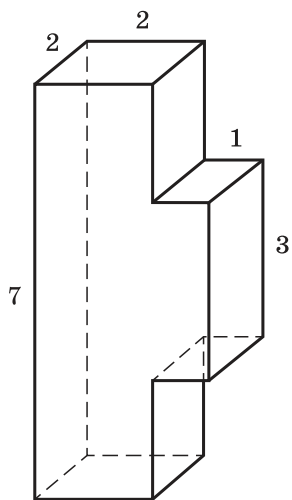


б)

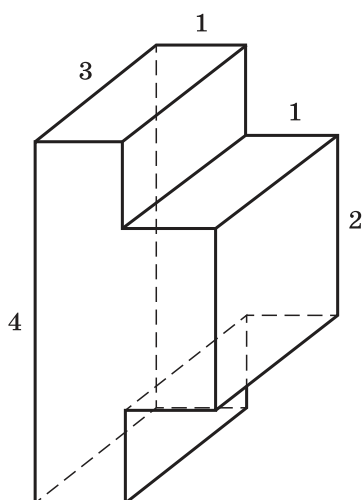


A19. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

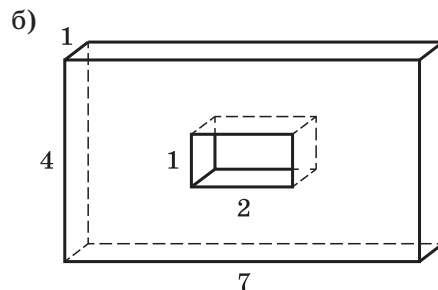
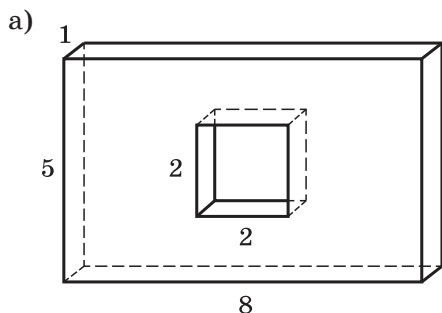
а)



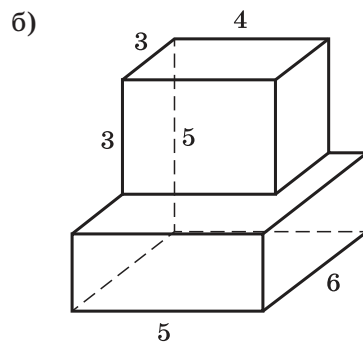
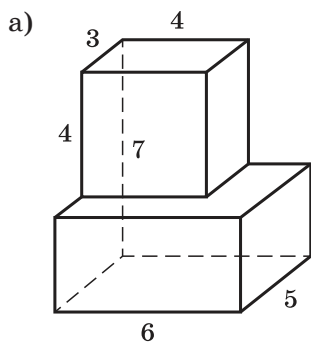
б)



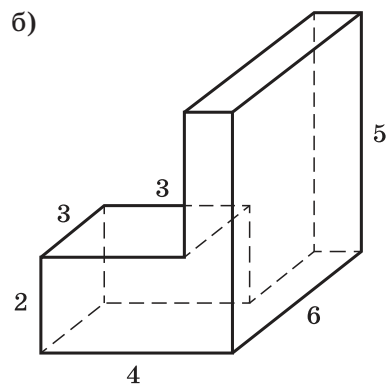
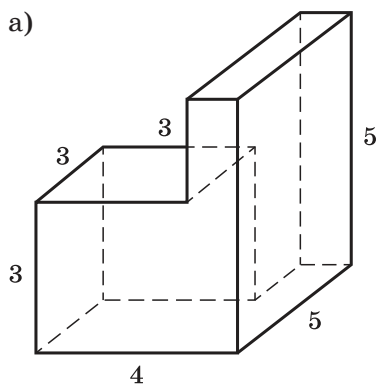
A20. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



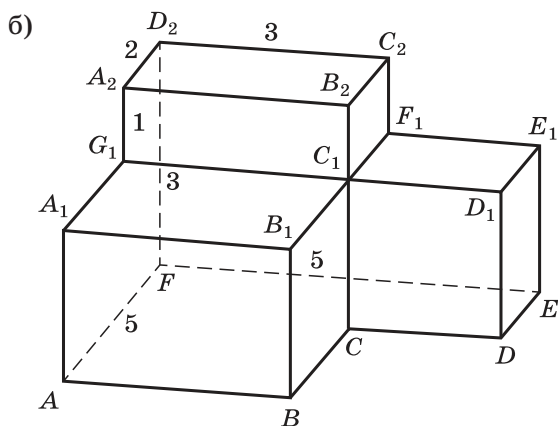
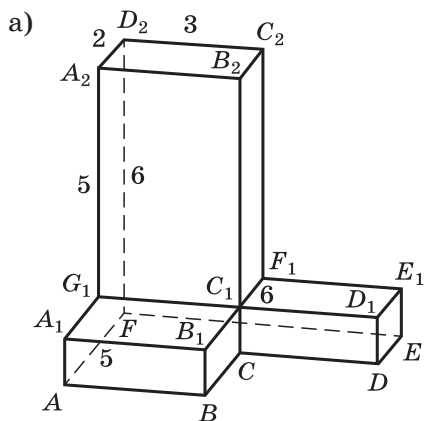
A21. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



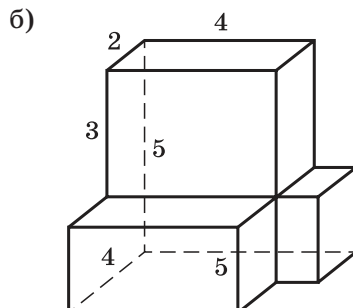
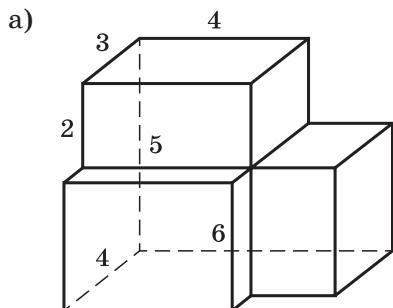
A22. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



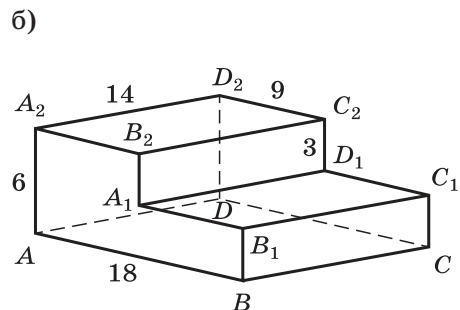
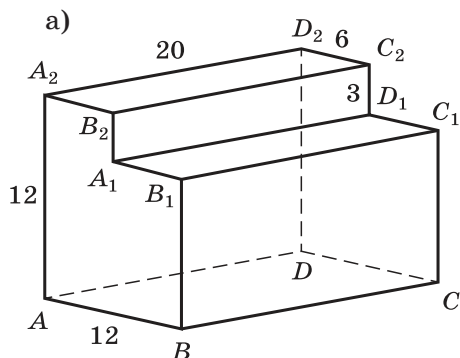
A23. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



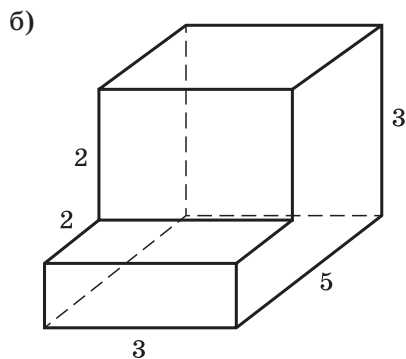
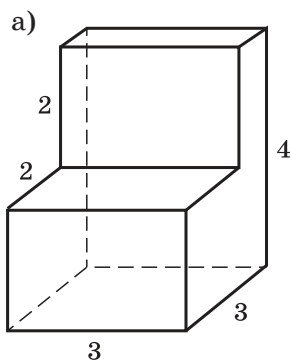
A24. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



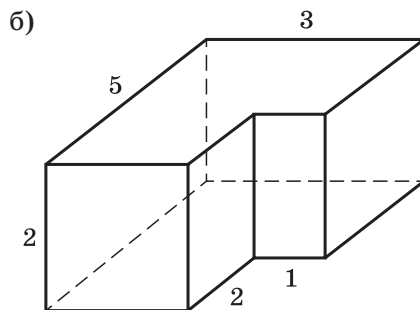
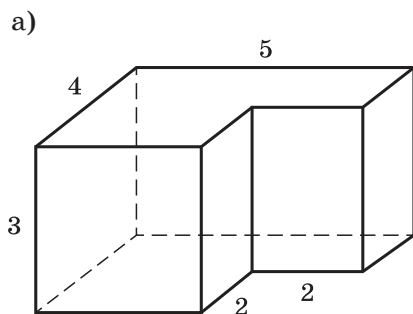
A25. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



A26. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

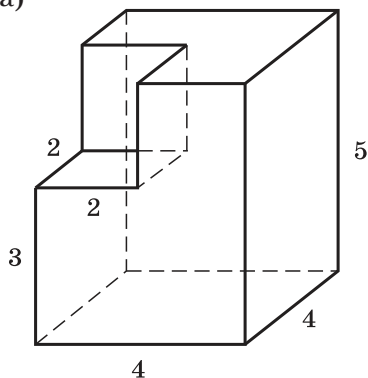


A27. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

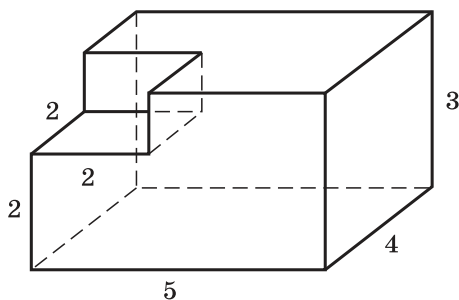


A28. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

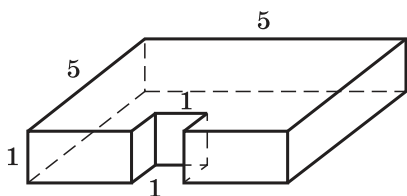


б)

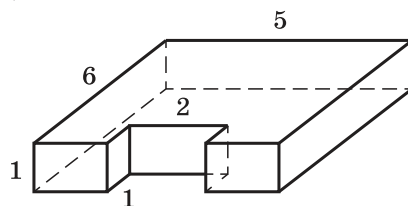


A29. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

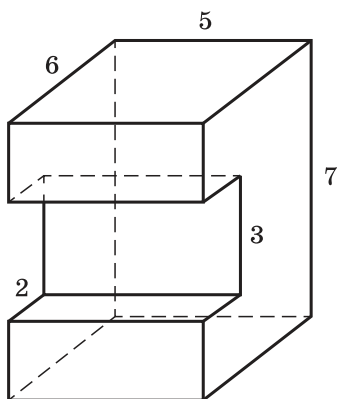


б)

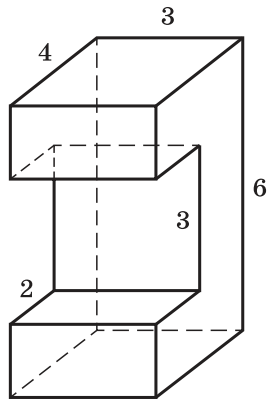


A30. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

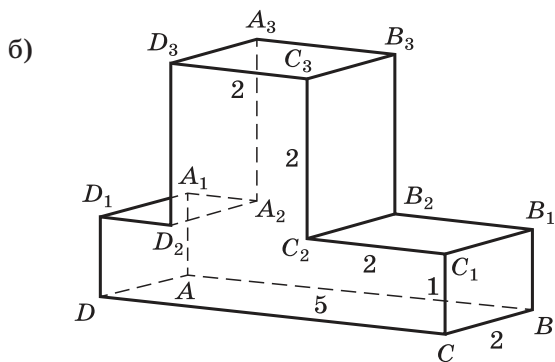
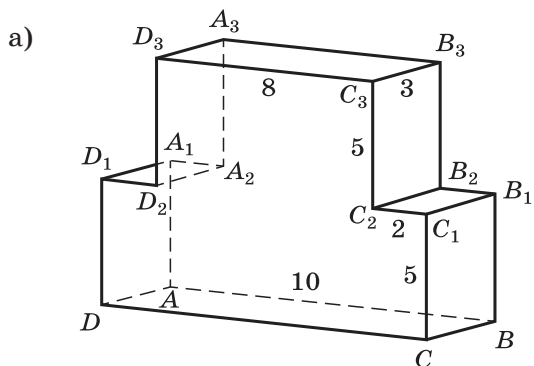
а)



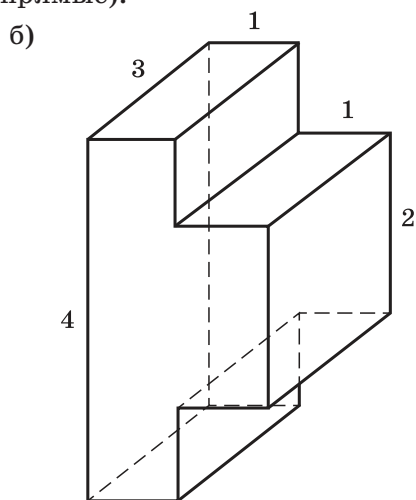
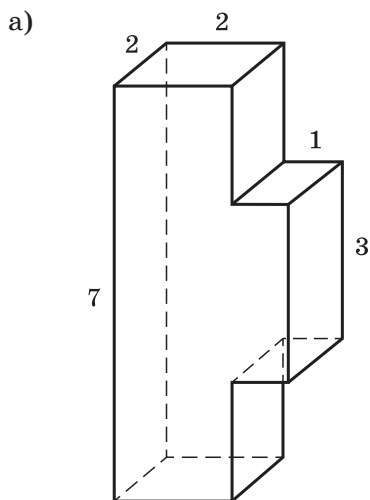
б)



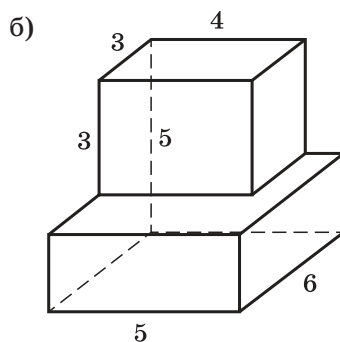
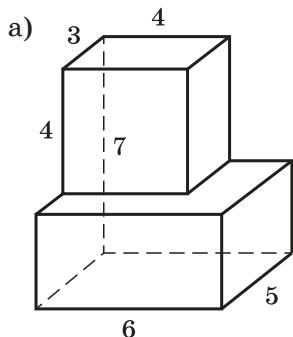
А31. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



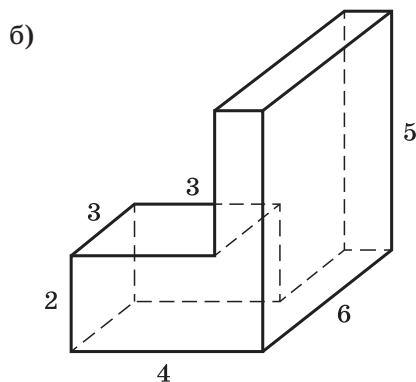
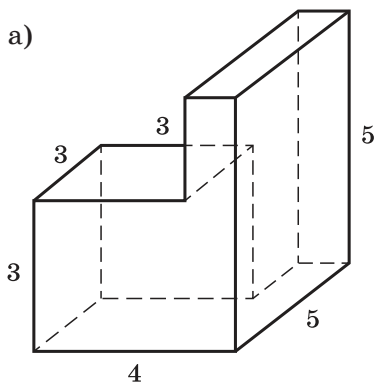
А32. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



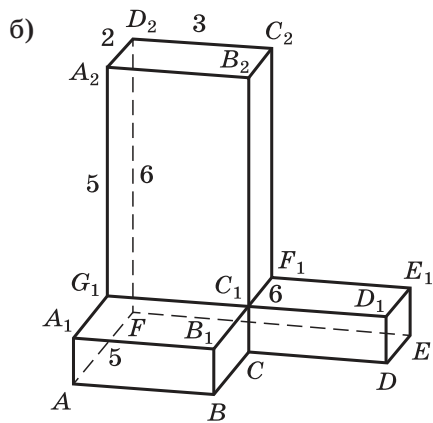
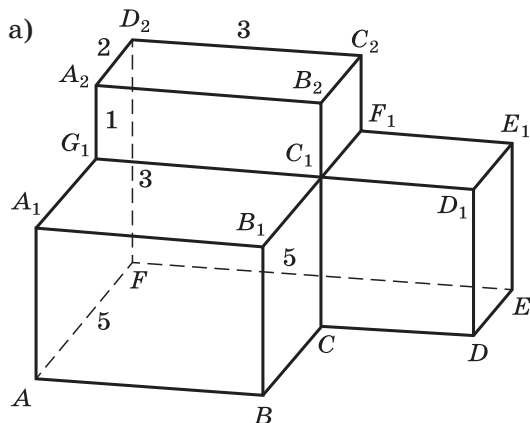
A33. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



A34. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

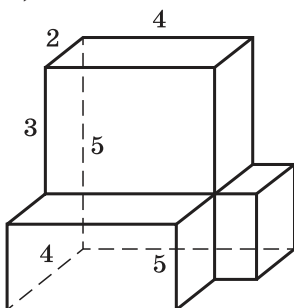


A35. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

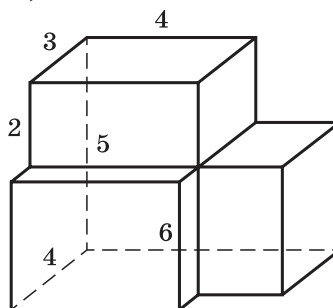


А36. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

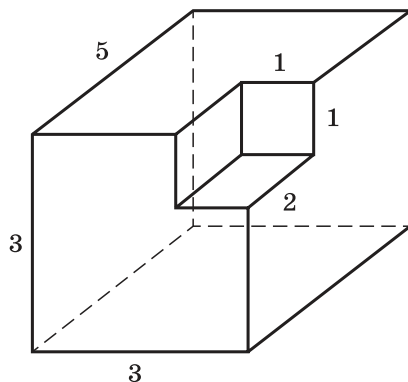


б)

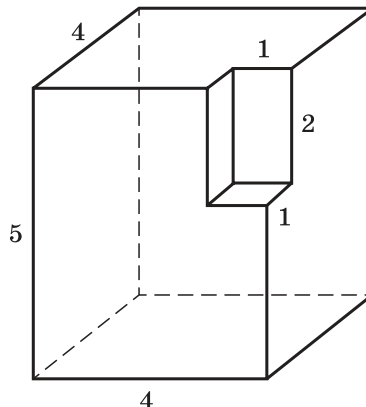


А37. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

а)



б)



Уровень В

В1. а) В основании наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC . Проекция точки A_1 на плоскость ABC лежит на высоте AH треугольника ABC . Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BB_1C , если боковое ребро, составляющее с плоскостью основания угол 30° , равно 16, а сторона основания равна $4\sqrt{3}$.

б) В основании наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC . Проекция точки A_1 на плоскость ABC лежит на высоте AH треугольника ABC . Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BB_1C , если боковое ребро, составляющее с плоскостью основания угол 60° , равно 12, а сторона основания равна 3.

- В2.** а) Два равных прямоугольника $ABCD$ и ABC_1D_1 имеют общую сторону AB , а их плоскости образуют угол, равный 60° . Известно, что $AB = 5$, $AD = 10$. Найдите угол между прямыми AC и BD_1 .
- б) Два равных прямоугольника $ABCD$ и ABC_1D_1 имеют общую сторону AB , а их плоскости образуют угол, равный 60° . Известно, что $AB = 7$, $AD = 14$. Найдите угол между прямыми AC и BD_1 .

Уровень С

- С1.** а) Точки E и P являются серединами отрезков AB и CD соответственно, принадлежащих двум скрещивающимся прямым, косинус угла между которыми равен $\frac{\sqrt{35}}{10}$. Отрезок EP является общим перпендикуляром этих прямых, $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$, а косинус угла ACB равен $\sqrt{\frac{3}{40}}$. Найдите длину отрезка EP .
- б) Точки E и P являются серединами отрезков AB и CD соответственно, принадлежащих двум скрещивающимся прямым, косинус угла между которыми равен $\frac{\sqrt{15}}{10}$. Отрезок EP является общим перпендикуляром этих прямых, $AB = 2\sqrt{3}$, $CD = 2\sqrt{5}$, а косинус угла ACB равен $\frac{2\sqrt{15}}{15}$. Найдите длину отрезка EP .

5.1. Правильная треугольная пирамида

Уровень А

- A1.** а) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 9, боковое ребро равно 6. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.
- б) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, боковое ребро равно 4. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.
- A2.** а) Апофема правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{7}$, боковое ребро равно 7. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.
- б) Апофема правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{13}$, боковое ребро равно 13. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.
- A3.** а) Высота правильной треугольной пирамиды втрое меньше стороны основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.
- б) Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.
- A4.** а) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $6\sqrt{3}$, высота равна 3. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 10, высота равна 5. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

- A5.** а) Тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 5. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания.
- б) Тангенс угла между плоскостью боковой грани правильной треугольной пирамиды и плоскостью её основания равен 6. Найдите тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.
- A6.** а) Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину, равно 7. Высота основания пирамиды равна 10. Найдите синус угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.
- б) Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину, равно 3,5. Высота основания пирамиды равна 5. Найдите синус угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.
- A7.** а) Медиана основания правильной треугольной пирамиды равна 3, высота пирамиды равна 2. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.
- б) Биссектриса основания правильной треугольной пирамиды равна 3, боковое ребро равно 4. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.
- A8.** а) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $3\sqrt{6}$, высота равна 6. Найдите плоский угол при вершине пирамиды. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $7\sqrt{6}$, высота равна 7. Найдите плоский угол при вершине пирамиды. Ответ дайте в градусах.
- A9.** а) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $2\sqrt{13}$, а сторона основания равна $6\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.
- б) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $4\sqrt{13}$, а высота основания равна 18. Найдите высоту пирамиды.

- A10.** а) Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, если его рёбра равны $\sqrt{2}$.
 б) Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, если его рёбра равны $3\sqrt{2}$.
- A11.** а) В треугольной пирамиде $SABC$ все рёбра, кроме ребра AB , равны 6. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AB и SC , если ребро $AB = 6\sqrt{2}$.
 б) В треугольной пирамиде $SABC$ все рёбра, кроме ребра AB , равны 2. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AB и SC , если ребро $AB = 2\sqrt{2}$.
- A12.** а) Во сколько раз уменьшится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра уменьшить в 1,6 раза?
 б) Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в 1,2 раза?
- A13.** а) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 10, а боковое ребро равно 13.
 б) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 24, а боковое ребро равно 15.
- A14.** а) Найдите площадь полной поверхности тетраэдра, если все его рёбра равны 5.
 б) Найдите площадь поверхности правильного тетраэдра, если высота его грани равна 3.
- A15.** а) Все плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если сторона её основания равна $3\sqrt{2}$.
 б) Все плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если сторона её основания равна $5\sqrt{2}$.
- A16.** а) Все плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её основания равна $8\sqrt{3}$.

- б) Все плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её основания равна $18\sqrt{3}$.
- A17.** а) Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, а двугранный угол при основании равен 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 б) Высота правильной треугольной пирамиды равна 3, а двугранный угол при основании равен 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- A18.** а) Все рёбра тетраэдра равны 2. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.
 б) Все рёбра тетраэдра равны 4. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.
- A19.** а) Найдите объём правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а высота равна $2\sqrt{3}$.
 б) Найдите объём правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 5, а высота равна $4\sqrt{3}$.
- A20.** а) Во сколько раз увеличится объём правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в два раза?
 б) Во сколько раз увеличится объём правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в три раза?
- A21.** а) Во сколько раз увеличится объём пирамиды, если её высоту увеличить в четыре раза?
 б) Во сколько раз увеличится объём пирамиды, если её высоту увеличить в пять раз?
- A22.** а) Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а объём равен $4\sqrt{3}$.
 б) Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8, а объём равен $8\sqrt{3}$.

Уровень В

- B1.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точки M и N — середины рёбер AB и CS соответственно.
 а) В каком отношении плоскость, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC параллельно прямым AB и CS , делит отрезок MN , считая от точки M ?

- б) В каком отношении плоскость, проходящая через середину ребра AS параллельно прямым AB и CS , делит отрезок MN , считая от точки M ?
- В2.** Дана треугольная пирамида $SABC$. Найдите угол между прямыми AS и BC , если:
- $SA = 24$, $BC = 10$, а расстояние между серединами рёбер BS и AC равно 13;
 - $SA = 30$, $BC = 16$, а расстояние между серединами рёбер BS и AC равно 17.
- В3.** Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно 12, точка M — середина ребра CD .
- Найдите угол между плоскостью AMB и прямой AD .
 - Найдите угол между прямой PM , где P — середина ребра BC , и плоскостью AMB .
- В4.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точки M и N — середины рёбер AS и BS соответственно. Найдите угол между плоскостями CMN и ABC , если:
- $SC = 6$, $AB = 4$;
 - $SC = 3$, $AB = 2$.
- В5.** Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно 12, точка M — середина ребра CD .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости AMB .
 - Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника ABD до плоскости AMB .
- В6.** Основанием треугольной пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 13$, $BC = 24$. Известно, что $DA = 6$, $DB = DC = 13$, точка M — середина ребра BD , точка K — середина ребра AB , точка N — середина ребра CD .
- Найдите расстояние от точки D до плоскости KMN .
 - Найдите расстояние от середины ребра BC до плоскости KMN .
- В7.** Основанием треугольной пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник ABC , в котором $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle ABC = 90^\circ$. Боковое ребро DA перпендикулярно к плоско-

сти основания и равно 4, точка M — середина ребра BD , точка N — середина ребра CD .

а) Найдите расстояние от точки B до плоскости AMN .

б) Найдите расстояние от середины ребра AB до плоскости AMN .

B8. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB . Все боковые рёбра образуют равные углы с плоскостью основания. Найдите расстояние между прямыми DM и CH , где DM — высота пирамиды $DABC$, CH — высота треугольника ABC , если:

а) $AB = 90$, $AC = 30$;

б) $AB = 18$, $AC = 6$.

B9. Плоскость α проходит через высоту SH правильного тетраэдра $SABC$ и ребро AS . Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α , если рёбра тетраэдра равны:

а) 2;

б) 5.

B10. а) В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 10, 10 и 12. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом 45° . Найдите высоту пирамиды.

б) В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 15, 15 и 24. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом 45° . Найдите высоту пирамиды.

B11. а) Высота треугольной пирамиды равна 35, а высота каждой боковой грани, проведённая из вершины пирамиды, равна 37. Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 84.

б) Высота треугольной пирамиды равна 15, а высоты боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны 17. Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 72.

B12. а) Высота правильной треугольной пирамиды равна 3, а двугранный угол при основании равен 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

б) Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, а двугранный угол при основании равен 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Уровень С

- С1.** а) Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно a , точка K — середина ребра AB , точка E лежит на ребре CD и делит его в отношении $CE : ED = 1 : 2$.
- 1) Найдите угол между прямыми BC и KE .
 - 2) Найдите расстояние между прямыми BC и KE .
- б) Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно a , точка K — середина ребра AB , точка E лежит на ребре CD и делит его в отношении $CE : ED = 1 : 3$.
- 1) Найдите угол между прямыми BC и KE .
 - 2) Найдите расстояние между прямыми BC и KE .
- С2.** а) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 5. На ребре AC находится точка D , на ребре AB — точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .
- б) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , а ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно $\sqrt{13}$. На ребре AC находится точка D , на ребре AB — точка E . Известно, что $AD = 2$, $BE = 1$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и середину ребра MA .
- С3.** а) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 5. На ребре AC лежит точка D , на ребре AB — точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .
- б) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 10. На ребре AC лежит точка D , на ребре AB — точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AE = LM = 4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

- С4.** а) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .
- б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, боковое ребро SA равно $2\sqrt{21}$. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .
- С5.** а) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .
- б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .
- С6.** а) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .
- б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, боковое ребро SA равно 25. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Найдите расстояние от вершины B до плоскости α .

- С7.** а) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро AS равно $3\sqrt{3}$, высота SH пирамиды равна $\sqrt{15}$. AT — высота пирамиды, проведённая к грани SBC . Найдите расстояние между прямыми AT и SB .
- б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро AS равно 6, высота SH пирамиды равна $2\sqrt{5}$. AT — высота пирамиды, проведённая к грани SBC . Найдите расстояние между прямыми AT и SB .
- С8.** а) В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$. На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$. Найдите площадь сечения MNB .
- б) В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 7\sqrt{2}$. На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 5$. Найдите площадь сечения MNB .
- С9.** а) На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины рёбер DA и DC соответственно. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.
- б) На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = CN : NB = 2 : 1$. Точки P и Q — середины рёбер DA и DC соответственно. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

5.2. Правильная четырёхугольная пирамида

Уровень А

- А1.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны. Найдите угол между ребром основания и боковым ребром, выходящими из одной вершины. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите угол между двумя соседними боковыми рёбрами. Ответ дайте в градусах.

- A2.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной четырёхугольной пирамиде диагональ основания равна боковому ребру. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.
- A3.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите угол между боковыми рёбрами, не принадлежащими одной грани. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна $\sqrt{2}$, боковые рёбра равны 2. Найдите угол между боковыми рёбрами, не принадлежащими одной грани. Ответ дайте в градусах.
- A4.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде высота вдвое меньше бокового ребра. Найдите угол между боковыми рёбрами, не принадлежащими одной грани. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна $\sqrt{3}$, боковое ребро равно 2. Найдите угол между боковыми рёбрами, не принадлежащими одной грани. Ответ дайте в градусах.
- A5.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде апофема равна 2, боковое ребро равно $\sqrt{6}$. Найдите угол между боковой гранью и основанием. Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной четырёхугольной пирамиде апофема равна 2, боковое ребро равно $\sqrt{5}$. Найдите угол между боковой гранью и основанием. Ответ дайте в градусах.
- A6.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 4, боковое ребро равно $2\sqrt{5}$. Точки M и N — середины рёбер SB и SC . Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки D , M и N . Ответ дайте в градусах.
- б) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ апофема равна стороне основания. Точка M — середина ребра SA . Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки B , C и M . Ответ дайте в градусах.

- A7.** а) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 2, высота пирамиды равна 1. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.
- б) Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.
- A8.** а) Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды в два раза больше её апофемы. Найдите угол между плоскостями несмежных боковых граней пирамиды. Ответ дайте в градусах.
- б) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна её апофеме. Найдите угол между плоскостями несмежных боковых граней пирамиды. Ответ дайте в градусах.
- A9.** а) Высота правильной четырёхугольной пирамиды в два раза меньше диагонали основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.
- б) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше её высоты. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.
- A10.** а) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 6, высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. Найдите боковое ребро пирамиды.
- б) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 14, высота пирамиды равна $7\sqrt{2}$. Найдите боковое ребро пирамиды.
- A11.** а) Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $\sqrt{8}$, высота пирамиды равна $\sqrt{7}$. Найдите боковое ребро пирамиды.
- б) Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 9, высота пирамиды равна $3\sqrt{7}$. Найдите сторону основания пирамиды.

- A12.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, точка S — вершина, $SO = 12$, $BD = 10$. Найдите боковое ребро SA .
б) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, точка S — вершина, $SO = 48$, $BD = 28$. Найдите боковое ребро SA .
- A13.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, точка S — вершина, $SC = 17$, $AC = 30$. Найдите отрезок SO .
б) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, точка S — вершина, $SA = 25$, $AC = 40$. Найдите отрезок SO .
- A14.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, точка S — вершина, $SO = 40$, $SA = 50$. Найдите отрезок AC .
б) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, точка S — вершина, $SO = 12$, $SB = 20$. Найдите отрезок BD .
- A15.** а) Плоскости двух несмежных боковых граней правильной четырёхугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, апофема пирамиды равна $4\sqrt{2}$. Найдите сторону основания пирамиды.
б) Плоскости двух несмежных боковых граней правильной четырёхугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, апофема пирамиды равна $3\sqrt{2}$. Найдите сторону основания пирамиды.
- A16.** а) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 16, а высота равна 6.
б) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 12, а высота равна 8.
- A17.** а) Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а высота равна 4.

б) Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8, а высота равна 3.

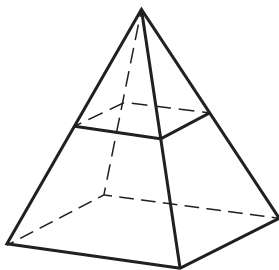
A18. а) Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а боковое ребро равно 5.

б) Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 10, а боковое ребро равно 13.

A19. а) Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь основания пирамиды, если боковое ребро равно 10.

б) Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь основания пирамиды, если боковое ребро равно 8.

A20. а) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 4. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



б) В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 18. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

A21. а) Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 2, а её боковое ребро равно $\sqrt{11}$.

б) Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а её боковое ребро равно $\sqrt{17}$.

- A22.** а) Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если её высота равна 6, а двугранный угол при основании равен 45° .
 б) Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если её высота равна 9, а двугранный угол при основании равен 45° .
- A23.** а) Плоский угол при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равен 60° . Найдите сторону основания, если объём пирамиды равен $36\sqrt{2}$.
 б) Плоский угол при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равен 60° . Найдите сторону основания, если объём пирамиды равен $288\sqrt{2}$.
- A24.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 4, объём пирамиды равен 128. Найдите боковое ребро пирамиды.
 б) В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 6, объём пирамиды равен 52. Найдите боковое ребро пирамиды.

Уровень В

- B1.** а) На ребре PC правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P взята точка T так, что $PT : TC = 1 : 6$. Найдите, в каком отношении, считая от вершины P , плоскость, проходящая через прямую AT параллельно прямой BD , делит ребро PD .
 б) На ребре PC правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P взята точка T так, что $PT : TC = 7 : 10$. Найдите, в каком отношении, считая от вершины P , плоскость, проходящая через прямую AT параллельно прямой BD , делит ребро PD .
- B2.** а) На ребре PC правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P взята точка T так, что $PT : TC = 2 : 3$. Найдите, в каком отношении, считая от вершины P , плоскость, проходящая через прямую AT параллельно прямой BD , делит ребро PD .
 б) На ребре PC правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P взята точка T так, что $PT : TC = 3 : 8$. Найдите, в каком отношении, считая от вершины P , плоскость, проходящая через прямую AT параллельно прямой BD , делит ребро PD .

- В3.** Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна 12 и равна боковому ребру пирамиды, точка M — середина ребра PA . Найдите расстояние до плоскости BMD от точки:
- C ;
 - K — середины ребра BP .
- В4.** Диагональ основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна 16, боковое ребро пирамиды равно 10, точка M — середина ребра PA , точка N — середина ребра AB , точка G — середина ребра DA . Найдите расстояние до плоскости GMN от точки:
- C ;
 - K — середины ребра BP .
- В5.** Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является ромб $ABCD$, в котором $AC = 6$, $BD = 8$. Боковое ребро PA перпендикулярно к плоскости основания пирамиды и равно 4. Найдите расстояние до плоскости BPD от точки:
- A ;
 - E — середины ребра BC .
- В6.** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны. Точка K — середина ребра SD , точка M — середина ребра AB . Найдите угол между прямыми:
- AK и SM ;
 - SM и SD .
- В7.** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S все рёбра равны. Точки M , N и K — середины рёбер AB , SC и BC соответственно.
- Найдите угол между прямой SK и плоскостью CSD .
 - Найдите угол между прямой MN и плоскостью ABC .
- В8.** Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно к плоскости основания.
- Найдите расстояние между прямыми SC и BD , если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$.
 - Найдите расстояние между прямыми SC и BD , если сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а треугольник BSD равносторонний.

- В9.** Через вершину S правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и середины сторон AD и CD основания проведена плоскость α , K — точка пересечения этой плоскости с прямой BC . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α , если:
- а) сторона основания пирамиды равна 4, боковое ребро равно 8;
 - б) сторона основания пирамиды равна 3, боковое ребро равно 6.

Уровень С

- С1.** а) На ребре PC правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P взята точка T так, что $PT : TC = 1 : 6$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AT параллельно прямой BD , если $PA = AB = 14$.
- б) На ребре PC правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P взята точка T так, что $PT : TC = 1 : 6$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AT параллельно прямой BD , если $PA = AB = 28$.
- С2.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 18, боковое ребро равно 15. Точка R принадлежит ребру MB , причём $MR : RB = 2 : 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки C и R параллельно прямой BD .
- б) В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 12, боковое ребро равно 24. Точка G принадлежит ребру MA , причём $MG : GA = 2 : 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B и G параллельно прямой AC .
- С3.** а) Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{10}$. На рёбрах SA и SD лежат точки E и F соответственно, причём $SE = 5AE$, $DF = 2SF$. Через точки E и F параллельно прямой CD проведена плоскость α . Найдите:
- 1) площадь сечения пирамиды плоскостью α ;
 - 2) угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

б) Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 2, а двугранный угол между плоскостью основания пирамиды и плоскостью её боковой грани равен $\arccos \frac{1}{3}$. На рёбрах SA и SD лежат точки E и F соответственно, причём $AE = 8ES$, $DF = 2SF$. Через точки E и F параллельно прямой AB проведена плоскость α . Найдите:

- 1) площадь сечения пирамиды плоскостью α ;
- 2) угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

С4. а) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5$. Боковые рёбра пирамиды $SA = 3\sqrt{3}$, $SB = 3\sqrt{19}$, $SD = 2\sqrt{13}$. Найдите угол между прямыми SC и BD .

б) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Боковые рёбра пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$. Найдите угол между прямыми SC и BD .

С5. а) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Боковые рёбра пирамиды $SA = 2\sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{23}$, $SD = 8$. Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASD .

б) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Боковые рёбра пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$. Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

С6. а) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 6$. Боковые рёбра пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = \sqrt{61}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

б) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Боковые рёбра пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

С7. а) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 20, высота пирамиды равна 5. На ребре AS отмечена точка K так, что $AK = 3$. Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

б) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, высота пирамиды равна 4. На ребре AS отмечена точка K так, что $AK = 3$. Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

С8. а) Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 6$, $BC = 6\sqrt{2}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 6$.

б) Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 4$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 4$.

С9. а) На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM : MD = 2 : 1$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

б) На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM : MD = 3 : 1$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

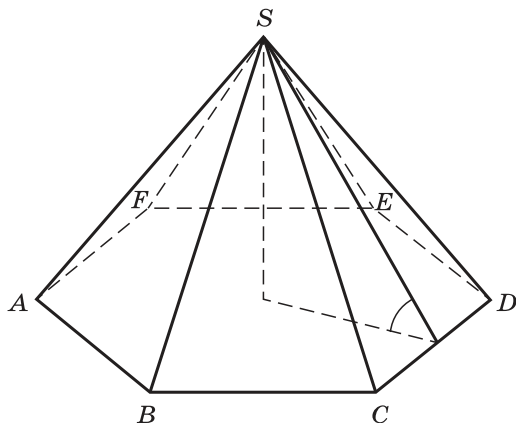
5.3. Правильная шестиугольная пирамида

Уровень А

- A1.** а) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна $\sqrt{3}$, боковое ребро равно 2. Найдите угол SAD . Ответ дайте в градусах.
б) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, боковое ребро равно 2. Найдите угол SAD . Ответ дайте в градусах.
- A2.** а) В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна 1, апофема пирамиды равна $\sqrt{3}$. Найдите угол между боковой гранью и основанием. Ответ дайте в градусах.
б) В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна апофеме. Найдите угол между боковой гранью и основанием. Ответ дайте в градусах.
- A3.** а) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна $2\sqrt{3}$, высота равна 2. Найдите угол между высотой пирамиды и её боковым ребром. Ответ дайте в градусах.
б) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, высота равна $\sqrt{3}$. Найдите угол между высотой пирамиды и её боковым ребром. Ответ дайте в градусах.
- A4.** а) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна $\sqrt{3}$, боковое ребро равно 3. Найдите угол SAC . Ответ дайте в градусах.
б) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, боковое ребро равно $\sqrt{3}$. Найдите угол SAC . Ответ дайте в градусах.
- A5.** а) Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 6, сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{6}$. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.
б) Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, сторона основания пирамиды равна 2. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

- A6.** а) Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 60° , высота пирамиды равна $3\sqrt{5}$. Найдите апофему пирамиды.
- б) Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 45° , высота пирамиды равна $2\sqrt{7}$. Найдите апофему пирамиды.
- A7.** а) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $ABCDEF$ равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости SBE .
- б) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $ABCDEF$ равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости SCF .
- A8.** а) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 16, боковое ребро равно 17. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- б) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10, боковое ребро равно 13. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- A9.** а) В правильной шестиугольной пирамиде все рёбра уменьшили в пять раз. Во сколько раз уменьшилась площадь полной поверхности пирамиды?
- б) В правильной шестиугольной пирамиде все рёбра уменьшили втрое. Во сколько раз уменьшилась площадь полной поверхности пирамиды?
- A10.** а) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объём пирамиды.
- б) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, боковое ребро равно 8. Найдите объём пирамиды.
- A11.** а) Объём правильной шестиугольной пирамиды равен 40,5, сторона основания равна 3. Найдите боковое ребро пирамиды.
- б) Объём правильной шестиугольной пирамиды равен 324, сторона основания равна 6. Найдите боковое ребро пирамиды.

- A12.** а) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10, угол между боковой гранью и основанием равен 45° . Найдите объём пирамиды.



- б) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6, угол между боковой гранью и основанием равен 45° . Найдите объём пирамиды.
- A13.** а) Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды, если её боковое ребро равно 6, а радиус окружности, описанной около основания, равен 3.
- б) Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды, если её боковое ребро равно 13, а радиус окружности, описанной около основания, равен 11.

Уровень В

- B1.** В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S сторона основания равна 1, боковое ребро равно 2. Найдите угол:
- между прямой BC и плоскостью ASF ;
 - между прямой AB и плоскостью BSC .
- B2.** В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S сторона основания равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите расстояние между прямыми:
- SB и AF ;
 - SB и DF .

- В3.** а) Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точки M и N — середины рёбер SA и SC . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M , N и B . В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий вершину S с центром основания пирамиды, считая от точки S ?
- б) Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка M — середина ребра BC . Постройте прямую пересечения плоскостей FSM и ASB . В каком отношении плоскость FSM делит отрезок, соединяющий точку A с серединой ребра SD , считая от точки A ?
- В4.** а) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковое ребро SA равно 10, сторона основания AB равна 5. Точка M — середина бокового ребра SC . Найдите угол между прямой BM и плоскостью ESF .
- б) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковое ребро SA равно 22, сторона основания AB равна 11. Точка N — середина бокового ребра SB . Найдите угол между прямой BN и плоскостью DSE .
- В5.** а) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро SA равно 8, сторона основания AB равна 4. Найдите угол между прямыми SB и AE .
- б) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро SA равно 14, сторона основания AB равна 7. Найдите угол между прямыми SB и AE .
- В6.** В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S сторона основания равна 1, боковое ребро равно 2. Точка G — середина ребра SC . Найдите расстояния:
- а) от точки S до прямой BF ;
- б) от точки B до прямой SA .
- В7.** В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S сторона основания равна 4, боковое ребро равно 8. Точка G — середина ребра SC . Найдите расстояние:
- а) от точки F до прямой BG ;
- б) от точки A до прямой SC .

- B8.** В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S сторона основания равна 13, боковое ребро равно 26. Точка G — середина ребра SC . Найдите расстояние:
- от точки A до плоскости SBF ;
 - от точки A до плоскости SCE .
- B9.** а) Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершину S пирамиды и середины сторон основания AB и DE , если высота пирамиды равна 14, а сторона основания равна $2\sqrt{3}$.
- б) Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, где S — вершина пирамиды, плоскостью SAC , если диагональ основания AD равна $20\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 17.
- B10.** а) Найдите расстояние от вершины A до прямой SD в правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, где S — вершина пирамиды, если боковые рёбра равны $4\sqrt{3}$, а сторона основания равна $2\sqrt{3}$.
- б) Найдите расстояние от вершины A до прямой SD в правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, где S — вершина пирамиды, если высота пирамиды и сторона основания равны 4 и 3 соответственно.

Уровень C

- C1.** а) Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Докажите, что плоскость α , проходящая через ребро AB и середину ребра SE , делит ребро SC в отношении 2 : 1, считая от вершины S . Найдите расстояние от точки S до плоскости α , если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен 60° .
- б) Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Докажите, что плоскость α , проходящая через ребро AB и середину ребра SE , делит ребро SC в отношении 2 : 1, считая от вершины S . Найдите расстояние от точки S до плоскости α , если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен 60° .

- C2.** а) Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Точка M — середина ребра SD . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A , B и M . Найдите угол между прямой AM и плоскостью CSF , если $AB : SA = 1 : \sqrt{19}$.
- б) Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AB и середину высоты SH пирамиды. Пусть K — точка пересечения этой плоскости с ребром SC . Найдите угол между прямой BK и плоскостью ASB , если $AB : AS = 1 : 2$.
- C3.** а) Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Точка M — середина бокового ребра CS . Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ESF . Найдите расстояние между прямыми BM и EF , если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{6}$, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$.
- б) Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Точка M — середина бокового ребра CS . Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ESF . Найдите расстояние между прямыми BM и EF , если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{6}$, а высота пирамиды равна $6\sqrt{2}$.
- C4.** а) Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Высота пирамиды втрое больше стороны основания и проходит через точку E . Докажите, что угол между боковой гранью ASB и плоскостью основания пирамиды равен 60° . Найдите расстояние от точки C до плоскости ASB , если сторона основания пирамиды равна 4.
- б) Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Высота пирамиды втрое больше стороны основания и проходит через точку E . Докажите, что угол между боковой гранью ASB и плоскостью основания пирамиды равен 60° . Найдите расстояние от точки C до плоскости ASB , если сторона основания пирамиды равна 8.
- C5.** а) Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Постройте прямую пересечения плоскостей ASB и ESF . Найдите расстояние от центра основания пирамиды до этой прямой, если пирамида правильная, сторона её основания равна $\sqrt{6}$, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$.

б) Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Постройте прямую пересечения плоскостей ASB и ESF . Найдите расстояние от центра основания пирамиды до этой прямой, если пирамида правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 6.

С6. а) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона AB основания $ABCDEF$ равна $\frac{8}{\sqrt{3}}$, боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Плоскость α проходит через прямую CF и перпендикулярна к плоскости боковой грани DSE . Докажите, что плоскость α делит боковое ребро SD в отношении $3:1$, считая от точки S . Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка S , а основанием — сечение пирамиды $SABCDEF$ плоскостью α .

б) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона AB основания $ABCDEF$ равна $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Плоскость α проходит через прямую CF и перпендикулярна к плоскости боковой грани DSE . Докажите, что плоскость α делит боковое ребро SD в отношении $3:1$, считая от точки S . Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка S , а основанием — сечение пирамиды $SABCDEF$ плоскостью α .

5.4. Произвольная пирамида

Уровень А

А1. а) Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC , у которого гипотенуза AC равна 20, катет AB равен 16. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 5. Найдите ребро SB .

б) Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC , у которого гипотенуза AC равна 10, катет AB равен 6. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 15. Найдите ребро SB .

- A2.** а) Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 17$, $AC = 30$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 24. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC .
- б) Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 10. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC .
- A3.** а) В основании пирамиды лежит ромб, большая диагональ которого равна 16. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 15. Найдите большее боковое ребро пирамиды.
- б) В основании пирамиды лежит квадрат, одно из боковых рёбер перпендикулярно основанию и равно стороне основания. Найдите высоту пирамиды, если большее боковое ребро пирамиды равно $7\sqrt{3}$.
- A4.** а) В основании пирамиды лежит параллелограмм. Высота пирамиды проходит через точку пересечения его диагоналей. Большее боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60° и равно $6\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.
- б) В основании пирамиды лежит параллелограмм. Высота пирамиды проходит через точку пересечения его диагоналей. Большее боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60° и равно $4\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.
- A5.** а) В треугольной пирамиде $SABC$ грани ABC и SAC перпендикулярны; $AB = BC = \sqrt{29}$, $SA = SC = 5$, $AC = 6$. Найдите ребро SB .
- б) В треугольной пирамиде $SABC$ грани ABC и SAC перпендикулярны; $AB = BC = \sqrt{30}$, $SA = SC = \sqrt{13}$, $AC = 6$. Найдите ребро SB .
- A6.** а) В основании пирамиды лежит прямоугольник. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы 30° и 45° . Найдите диагональ прямоугольника, если высота пирамиды равна 4.

- б) В основании пирамиды лежит прямоугольник. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы 30° и 45° . Найдите диагональ прямоугольника, если высота пирамиды равна 6.
- A7.** а) Высота треугольной пирамиды равна 35, а высота каждой боковой грани, проведённая из вершины пирамиды, равна 37. Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 84.
- б) Высота треугольной пирамиды равна 15, а высота каждой боковой грани, проведённая из вершины пирамиды, равна 17. Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 72.
- A8.** а) Найдите объём пирамиды, высота которой равна 5, а основание — прямоугольник со сторонами 4 и 9.
- б) Найдите объём пирамиды, высота которой равна 8, а основание — прямоугольник со сторонами 2 и 6.
- A9.** а) Основанием пирамиды служит квадрат со стороной 9. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 2.
- б) Основанием пирамиды служит квадрат со стороной 7. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 6.
- A10.** а) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 9 и 7. Объём пирамиды равен 105. Найдите высоту пирамиды.
- б) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 5 и 6. Объём пирамиды равен 40. Найдите высоту пирамиды.
- A11.** а) Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, причём каждое из них равно 9. Найдите объём пирамиды.
- б) Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, причём каждое из них равно 3. Найдите объём пирамиды.

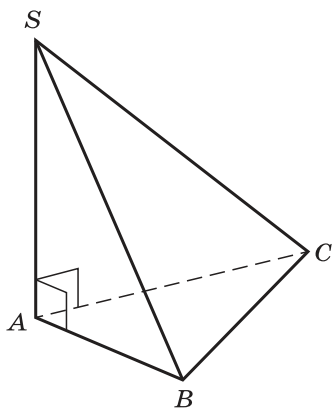
A12. а) Основанием пирамиды служит прямоугольник. Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 9. Найдите объём пирамиды.

б) Основанием пирамиды служит прямоугольник. Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 3. Найдите объём пирамиды.

A13. а) Найдите объём треугольной пирамиды $DABC$, если $AB = 30$, $BC = CA = 17$ и двугранные углы при основании пирамиды равны 45° .

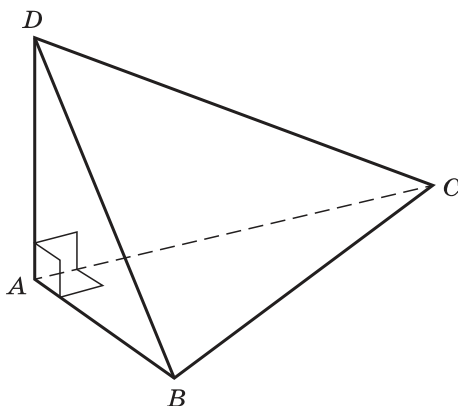
б) В основании пирамиды лежит треугольник ABC , в котором $AB = 16$, $BC = 7$, $\angle ABC = 30^\circ$. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 6.

A14. а) В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 6, а боковое ребро SA перпендикулярно основанию и равно $6\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.



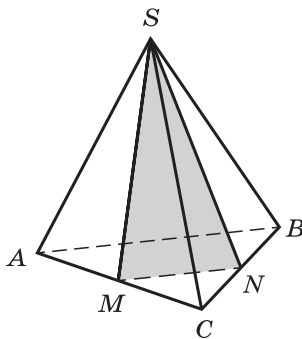
б) В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 4, а боковое ребро SA перпендикулярно основанию и равно $5\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

- A15.** а) В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AB , AC и AD взаимно перпендикулярны. Найдите объём этой пирамиды, если $AB = 5$, $AC = 24$ и $AD = 3$.



- б) В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AB , AC и AD взаимно перпендикулярны. Найдите объём этой пирамиды, если $AB = 4$, $AC = 12$ и $AD = 1$.

- A16.** а) От треугольной пирамиды, объём которой равен 16, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.



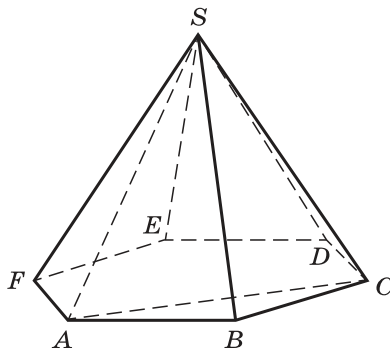
- б) От треугольной пирамиды, объём которой равен 30, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.

A17. а) Объём треугольной пирамиды равен 18. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении $2:7$, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает данную пирамиду.

б) Объём треугольной пирамиды равен 14. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении $2:5$, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает данную пирамиду.

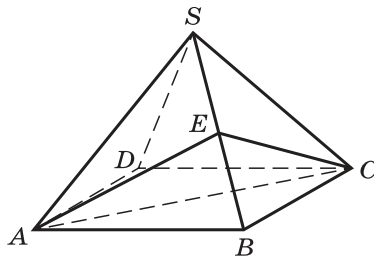
A18. а) Объём треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 18. Найдите объём шестиугольной пирамиды.

б) Объём треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 6. Найдите объём шестиугольной пирамиды.



A19. а) Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 32. Точка E — середина ребра SB . Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.

б) Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 88. Точка E — середина ребра SB . Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.



Уровень В

- В1.** Все плоские углы при вершине A треугольной пирамиды $DABC$ — прямые, $DA = 6$, $CD = 10$, точка M — середина ребра CD , точка K — середина ребра AC , точка N — середина ребра CB .
- а) Найдите расстояние от точки A до плоскости KMN .
б) Найдите расстояние от середины ребра AB до плоскости KMN .
- В2.** Высота PC треугольной пирамиды $PABC$ с вершиной P проходит через точку C . Прямые PA и BC перпендикулярны. Расстояние от точки P до прямой AB равно 5, $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите угол между плоскостью основания и боковым ребром:
- а) PA ; б) PB .
- В3.** В треугольной пирамиде $DABC$ все боковые рёбра равны. Найдите расстояние между прямыми DH и BC , где DH — высота пирамиды $DABC$, если основание пирамиды — треугольник ABC со сторонами:
- а) $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$;
б) $AC = 9$, $BC = 12$, $AB = 15$.
- В4.** Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна 12, боковое ребро пирамиды равно $6\sqrt{5}$, точка M — середина ребра PD , точка N — середина ребра PC . Найдите расстояние до плоскости AMN от точки:
- а) T — середины ребра BC ;
б) L — точки пересечения медиан треугольника APB .
- В5.** Диагональ основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна 12. Высота боковой грани, проведённая к стороне основания, равна 6 см. Найдите расстояние до плоскости ABP от точки:
- а) D ;
б) O — точки пересечения медиан треугольника ADP .
- В6.** Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно плоскости SAD , если площадь грани SAD равна:
- а) 16; б) 20.

- B7.** В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S сторона основания равна 1, боковое ребро равно 2. Найдите расстояние между прямыми:
- а) SB и AE ; б) SB и AD .
- B8.** а) Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точки M и N — середины рёбер BC и EF . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MN параллельно ребру SA . В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC , считая от точки S ?
- б) Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BF параллельно ребру SA . В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC , считая от точки S ?
- B9.** а) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро SA равно 18, сторона основания AB равна 9. Найдите угол между прямыми SB и AD .
- б) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро SA равно 14, сторона основания AB равна 7. Найдите угол между прямыми SB и AD .
- B10.** а) В основании четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Найдите, в каком отношении плоскость, проходящая через вершину C и середины рёбер MB и MD , делит ребро MA , считая от вершины M .
- б) В основании четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Найдите, в каком отношении плоскость, проходящая через вершины D и A и середину ребра MB , делит ребро MC , считая от вершины M .

Уровень С

- C1.** а) Основание четырёхугольной пирамиды $KABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$ и каждое боковое ребро пирамиды образует угол 60° с плоскостью её основания. Найдите угол между прямой DP и плоскостью KCD , если точка P — середина ребра KB .

б) Основание четырёхугольной пирамиды $KABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AB = 5$, $AD = 15$ и каждое боковое ребро пирамиды образует угол 60° с плоскостью её основания. Найдите угол между прямой DP и плоскостью KCD , если точка P — середина ребра KB .

С2. а) Основание пирамиды $MABCD$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 6$, $BC = 12$. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60° . Точка P — середина ребра MC . Найдите угол, который образует прямая DP с плоскостью MAC .

б) Основание пирамиды $MABCD$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 11$, $BC = 22$. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания под углом 60° . Точка K — середина ребра MC . Найдите угол, который образует прямая DK с плоскостью MAC .

С3. а) В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 1$, $BC = 4$. Боковое ребро MA перпендикулярно плоскости основания. Расстояние от точки A до прямой CK , где точка K — середина ребра MD , равно $\frac{13}{\sqrt{29}}$. Найдите объём пирамиды.

б) В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна $\sqrt{5}$, а диагональ AC равна 4. Основанием высоты пирамиды, проведённой из вершины M , является точка пересечения диагоналей ромба. Расстояние от точки C до прямой DK , где точка K — середина ребра MA , равно $\frac{9\sqrt{17}}{17}$. Найдите объём пирамиды.

С4. а) В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AB = 2AD = 2$, $MA = 4$, $\angle MAB = \angle MAD = 60^\circ$. Точка K является серединой ребра MC . Найдите, какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника PAB , если точка P принадлежит прямой DK .

б) В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AD = 3\sqrt{3}$, $AB = 6\sqrt{3}$, $MA = 12\sqrt{3}$, $\angle MAB = \angle MAD = 60^\circ$. Точка F является серединой ребра MC . Найдите

те, какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника PAB , если точка P принадлежит прямой DF .

- С5.** а) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. На ребре AC лежит точка D , на ребре AB — точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AE = AL = 4$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .
- б) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC лежит точка D , на ребре AB — точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $CD = BE = AL = 2$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .
- С6.** а) В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, $AB = BC = AC = 6\sqrt{2}$. На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 1 : 2$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .
- б) В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, $AB = BC = AC = 4\sqrt{2}$. На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 1 : 2$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .
- С7.** а) На ребре PC правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P взята точка T так, что $PT : TC = 7 : 10$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AT параллельно прямой BD , если $PA = AB = 34$.
- б) На ребре PC правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P взята точка T так, что $PT : TC = 7 : 10$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AT параллельно прямой BD , если $PA = AB = 102$.
- С8.** а) В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 6, боковое ребро равно 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD .

б) В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 4, боковое ребро равно 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC .

С9. а) Основание пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , причём $AD = 2BC$. Точка M — середина бокового ребра SA , а высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания. Докажите, что сечение пирамиды плоскостью BMC — прямоугольник. Найдите расстояние между прямыми AD и CM , если $BC = 6$, высота пирамиды равна 16, а диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны.

б) Основание пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , причём $AD = 2BC$. Точка M — середина бокового ребра SA , а высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания. Докажите, что сечение пирамиды плоскостью BMC — прямоугольник. Найдите расстояние между прямыми AD и CM , если $BC = 3$, высота пирамиды равна 8, а диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны.

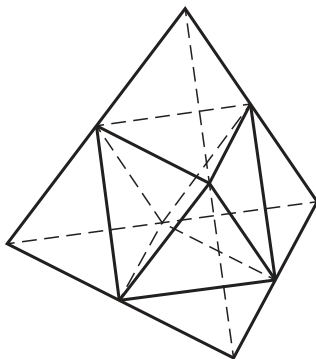
С10. а) Плоскости двух противоположных боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны к плоскости основания, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD = BC$, $AB = 6$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Известно, что в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки D до плоскости SAB .

б) Плоскости двух противоположных боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны к плоскости основания, расстояние от вершины S до прямой AB равно $4\sqrt{2}$. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD = BC$, $CD = 2$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$. Известно, что в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки C до плоскости SAB .

5.5. Комбинации многогранников

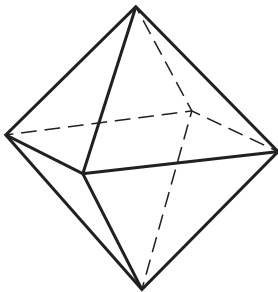
Уровень А

- A1. а) Площадь поверхности тетраэдра равна 18. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.



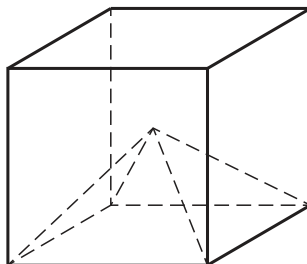
- б) Площадь поверхности тетраэдра равна 16. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

- A2. а) Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его рёбра увеличить в 8 раз?



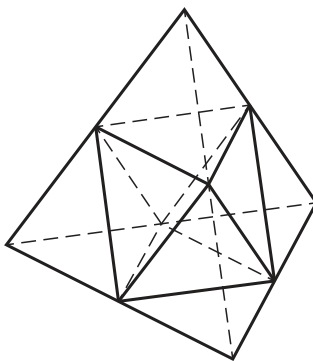
- б) Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его рёбра увеличить в 13 раз?

- A3. а) Объём куба равен 90. Найдите объём четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.



б) Объём куба равен 60. Найдите объём четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

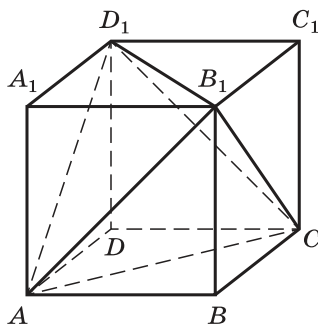
- А4.** а) Объём тетраэдра равен 56. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.



б) Объём тетраэдра равен 42. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

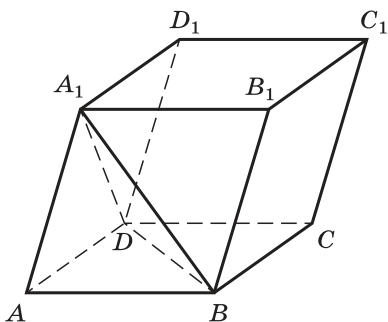
- А5.** а) От треугольной призмы, объём которой равен 6, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объём оставшейся части призмы.
- б) От треугольной призмы, объём которой равен 21, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объём оставшейся части призмы.

- A6.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.
- б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 9.
- A7.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 7.
- б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 6.
- A8.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 6.
- б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, C, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 4.
- A9.** а) Объём параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ равен 3. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1 .



- б) Объём параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ равен 1,5. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1 .

- A10.** а) Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 9. Найдите объём треугольной пирамиды $ABCA_1$.
 б) Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12. Найдите объём треугольной пирамиды $ABCA_1$.
- A11.** а) Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если объём треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.



- б) Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если объём треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 4.
- A12.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3, AD = 4, AA_1 = 5$.
 б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 2, AD = 3, AA_1 = 5$.
- A13.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 4$.
 б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 2, AD = 5, AA_1 = 6$.
- A14.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B, C, C_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 4$.
 б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B, C, C_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 2, AD = 3, AA_1 = 5$.

- A15.** а) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ рёбра основания равны 2, а высота равна $2\sqrt{3}$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, C, E, A_1, C_1, E_1 .
- б) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ рёбра основания равны 5, а высота равна $10\sqrt{3}$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, E, B_1, C_1, E_1 .
- A16.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.
- б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 6.
- A17.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.
- б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 6.
- A18.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.
- б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 4.
- A19.** а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.

б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 5.

A20. а) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.

б) Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 4.

Уровень В

B1. а) В правильную треугольную призму вписана пирамида, вершинами которой являются центр верхнего основания призмы и середины сторон нижнего основания призмы. Объём пирамиды равен 3. Найдите объём призмы.

б) В правильную треугольную призму вписана пирамида, вершинами которой являются центр верхнего основания призмы и середины сторон нижнего основания призмы. Объём пирамиды равен 4. Найдите объём призмы.

B2. а) В правильную четырёхугольную призму вписана пирамида, вершинами которой являются центр верхнего основания призмы и середины сторон нижнего основания призмы. Объём пирамиды равен 7. Найдите объём призмы.

б) В правильную четырёхугольную призму вписана пирамида, вершинами которой являются центр верхнего основания призмы и середины сторон нижнего основания призмы. Объём пирамиды равен 5. Найдите объём призмы.

B3. а) Рёбра треугольной пирамиды $OABC$, выходящие из вершины O , попарно перпендикулярны и равны $\frac{1}{2}$, 1 и 2. В пирамиду вписан куб так, что одна его вершина совпадает с вершиной O . Найдите объём куба.

б) Рёбра треугольной пирамиды $OABC$, выходящие из вершины O , попарно перпендикулярны и равны $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и 1. В пирамиду вписан куб так, что одна его вершина совпадает с вершиной O . Найдите объём куба.

В4. а) Плоскость проходит через точку бокового ребра треугольной пирамиды параллельно основанию пирамиды. Эта точка делит боковое ребро в отношении $1 : 2$, считая от вершины пирамиды. Найдите объём призмы, верхним основанием которой является сечение пирамиды указанной плоскостью, а нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды, если объём пирамиды равен 18.

б) Плоскость проходит через точку бокового ребра треугольной пирамиды параллельно основанию пирамиды. Эта точка делит боковое ребро в отношении $1 : 3$, считая от вершины пирамиды. Найдите объём призмы, верхним основанием которой является сечение пирамиды указанной плоскостью, а нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды, если объём пирамиды равен 64.

В5. а) Плоскость проходит через точку бокового ребра данной треугольной пирамиды параллельно основанию пирамиды. Эта точка делит боковое ребро в отношении $3 : 2$, считая от вершины пирамиды. Найдите объём пирамиды, основанием которой является сечение данной пирамиды указанной плоскостью, а вершиной — одна из вершин основания данной пирамиды, если объём данной пирамиды равен 125.

б) Плоскость проходит через точку бокового ребра данной треугольной пирамиды параллельно основанию пирамиды. Эта точка делит боковое ребро в отношении $2 : 3$, считая от вершины пирамиды. Найдите объём пирамиды, основанием которой является сечение данной пирамиды указанной плоскостью, а вершиной — середина одной из сторон основания данной пирамиды, если объём данной пирамиды равен 250.

В6. а) Плоскость проходит через середину ребра A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC параллельно плоскости боковой грани BB_1C_1C призмы. Найдите объём пирамиды, основанием которой является сечение призмы указанной плоскостью, а вершиной — середина ребра BB_1 , если объём призмы равен 42.

- б) Плоскость проходит через середину ребра B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC параллельно плоскости боковой грани AA_1C_1C призмы. Найдите объём пирамиды, основанием которой является сечение призмы указанной плоскостью, а вершиной — середина ребра CC_1 , если объём призмы равен 36.
- В7.** а) Плоскость проходит через середину ребра B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC параллельно плоскости боковой грани AA_1C_1C призмы. Найдите объём параллелепипеда, одним из оснований которого является сечение призмы указанной плоскостью, а другое основание лежит в плоскости грани AA_1C_1C , если объём призмы равен 72.
- б) Плоскость проходит через середину ребра A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC параллельно плоскости боковой грани BB_1C_1C призмы. Найдите объём параллелепипеда, одним из оснований которого является сечение призмы указанной плоскостью, а другое основание лежит в плоскости грани BB_1C_1C , если объём призмы равен 64.
- В8.** а) Объём прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ равен 30. Найдите объём пирамиды, основанием которой является сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую AD_1 параллельно прямой A_1C_1 , а вершиной — точка B .
- б) Объём прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ равен 24. Найдите объём пирамиды, основанием которой является сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую AC параллельно прямой A_1B , а вершиной — точка C_1 .

Уровень С

- С1.** а) Ребро куба равно 2. Второй куб получен поворотом данного куба на 90° вокруг оси, проходящей через среднюю линию одной из его граней. Найдите объём общей части двух кубов.
- б) Ребро куба равно 4. Второй куб получен поворотом данного куба на 90° вокруг оси, проходящей через среднюю линию одной из его граней. Найдите объём общей части двух кубов.

- С2.** а) Два равных ромба $ABCD$ и ABC_1D_1 имеют общую сторону AB , а их плоскости образуют угол, равный 45° . Известно, что острый угол B каждого из ромбов равен 60° . Найдите угол между прямыми BC и BC_1 .
- б) Два равных ромба $ABCD$ и ABC_1D_1 имеют общую сторону AB , а их плоскости образуют угол, равный 45° . Известно, что острый угол A каждого из ромбов равен 60° . Найдите угол между прямыми BC и BC_1 .
- С3.** а) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- 1) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .
- 2) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .
- б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- 1) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $1 : 5$, считая от точки E .
- 2) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .
- С4.** а) В треугольной пирамиде $SABC$ точки K , L и M — середины сторон AB , BC и AC соответственно. Через середину ребра SA параллельно основанию пирамиды проведена плоскость, пересекающая отрезки SK , SL и SM в точках P , Q и R соответственно. Треугольник PQR принят за верхнее основание прямой призмы, нижнее основание которой лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите объём призмы, если объём пирамиды равен 32.

б) В треугольной пирамиде $SABC$ на сторонах основания AB , BC и AC выбраны точки K , L и M соответственно так, что $AK : KB = BL : LC = CM : MA = 2 : 1$. Через середину ребра SA параллельно основанию пирамиды проведена плоскость, пересекающая отрезки SK , SL и SM в точках P , Q и R соответственно. Треугольник PQR принят за верхнее основание прямой призмы, нижнее основание которой лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите объём призмы, если объём пирамиды равен 16.

С5. а) В основании усечённой пирамиды $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что AB равно 12, а $A_1 B_1$ равно 4. Расстояние между двумя параллельными рёбрами, лежащими в плоскостях различных оснований и в противоположных боковых гранях, равно 7. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через указанные параллельные рёбра.

б) В основании усечённой пирамиды $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что AB равно 15, а $A_1 B_1$ равно 5. Расстояние между двумя параллельными рёбрами, лежащими в плоскостях различных оснований и в противоположных боковых гранях, равно 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через указанные параллельные рёбра.

6.1. Цилиндр

Уровень А

- A1.** а) Найдите высоту цилиндра, диагональ осевого сечения и радиус основания которого равны 17 и 4 соответственно.
б) Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, радиус основания и высота которого равны 3 и 8 соответственно.
- A2.** а) Плоскость пересекает цилиндр так, что в сечении получается квадрат. Найдите высоту цилиндра, если расстояние от этого сечения до оси цилиндра равно 12, а радиус основания равен 13.
б) Плоскость пересекает цилиндр так, что в сечении получается квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси цилиндра, если высота цилиндра равна 12, а радиус основания равен 10.
- A3.** а) Точка, лежащая на окружности верхнего основания цилиндра, соединена с точкой, лежащей на окружности его нижнего основания. Угол между проведённой прямой и осью цилиндра составляет 45° . Найдите радиус цилиндра, если длина отрезка, соединяющего данные точки, равна $7\sqrt{2}$, а радиус цилиндра равен его высоте.
б) Точка, лежащая на окружности верхнего основания цилиндра, соединена с точкой, лежащей на окружности его нижнего основания. Угол между проведённой прямой и осью цилиндра составляет 45° . Найдите радиус цилиндра, если длина отрезка, соединяющего данные точки, равна $5\sqrt{2}$, а радиус цилиндра равен его высоте.
- A4.** а) Точка, лежащая на окружности верхнего основания цилиндра, соединена с точкой, лежащей на окружности его нижнего основания. Угол между радиусами, проведёнными в эти точки, равен 60° . Найдите длину отрезка, соединяющего данные точки, если радиус и высота цилиндра равны $3\sqrt{2}$.

б) Точка, лежащая на окружности верхнего основания цилиндра, соединена с точкой, лежащей на окружности его нижнего основания. Угол между радиусами, проведёнными в эти точки, равен 60° . Найдите длину отрезка, соединяющего данные точки, если радиус и высота цилиндра равны $4\sqrt{2}$.

А5. а) Точки A и B лежат на окружности одного основания цилиндра, а точки C и D — на окружности другого основания цилиндра, при этом $ABCD$ — квадрат, плоскость которого не параллельна оси цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если известно, что радиус основания цилиндра равен 6, а диагональ квадрата равна 13.

б) Точки A и B лежат на окружности одного основания цилиндра, а точки C и D — на окружности другого основания цилиндра, при этом $ABCD$ — квадрат, плоскость которого не параллельна оси цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если известно, что радиус основания цилиндра равен 8, а диагональ квадрата равна 20.

А6. а) На окружностях верхнего и нижнего оснований цилиндра выбрано по точке, расстояние между которыми равно 13. Найдите расстояние от прямой, проходящей через эти точки, до оси цилиндра, если высота цилиндра равна 5, а радиус его основания равен 10.

б) На окружностях верхнего и нижнего оснований цилиндра выбрано по точке. Найдите расстояние между этими точками, если расстояние от прямой, проходящей через данные точки, до оси цилиндра равно 5, высота цилиндра равна 7, а радиус его основания равен 13.

А7. а) Радиус основания цилиндра равен 2, его высота равна $\frac{4}{\pi}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

б) Радиус основания цилиндра равен 3, его высота равна $\frac{5}{\pi}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

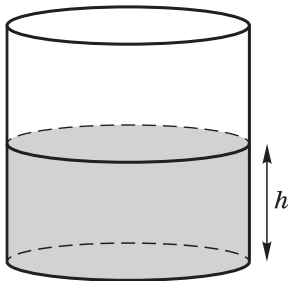
А8. а) Длина окружности основания цилиндра равна 8, его высота равна 7. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

б) Длина окружности основания цилиндра равна 9, его высота равна 6. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

- A9.** а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 36, его высота равна 3. Найдите длину окружности основания цилиндра.
б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 56, его высота равна 4. Найдите длину окружности основания цилиндра.
- A10.** а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 72π , его высота равна 6. Найдите диаметр основания цилиндра.
б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 84π , его высота равна 14. Найдите диаметр основания цилиндра.
- A11.** а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 28π , его диаметр основания равен 4. Найдите высоту цилиндра.
б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 32π , его диаметр основания равен 8. Найдите высоту цилиндра.
- A12.** а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π , а площадь его основания равна 16π . Найдите высоту цилиндра.
б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 35π , а площадь его основания равна 25π . Найдите высоту цилиндра.
- A13.** а) Площадь полной поверхности цилиндра равна 8π , его высота равна 3. Найдите радиус основания цилиндра.
б) Площадь полной поверхности цилиндра равна 14π , его высота равна 6. Найдите радиус основания цилиндра.
- A14.** а) Площадь полной поверхности цилиндра равна 70π , его радиус основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.
б) Площадь полной поверхности цилиндра равна 132π , его радиус основания равен 6. Найдите высоту цилиндра.
- A15.** а) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 27π . Найдите площадь осевого сечения цилиндра.
б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 43π . Найдите площадь осевого сечения цилиндра.
- A16.** а) Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите радиус основания цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 36π .
б) Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите высоту цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 25π .

- A17.** а) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь его основания равна 64π , а высота цилиндра равна $\frac{2}{\pi}$.
 б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь его основания равна 36π , а высота цилиндра равна $\frac{5}{\pi}$.
- A18.** а) Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите площадь этого сечения, если площадь основания цилиндра равна 25π .
 б) Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите площадь этого сечения, если площадь основания цилиндра равна 13π .
- A19.** а) Высота цилиндра равна 2, радиус его основания равен 13. Найдите площадь сечения, проведённого параллельно оси цилиндра на расстоянии 5 от неё.
 б) Площадь сечения цилиндра плоскостью, отстоящей от оси цилиндра на расстояние, равное 4, равна 36 . Найдите высоту цилиндра, если радиус его основания равен 5.
- A20.** а) Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в два раза выше второй, а вторая втрое шире первой. Во сколько раз площадь боковой поверхности второй кружки больше площади боковой поверхности первой кружки?
 б) Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в три раза ниже второй, а вторая — вдвое уже первой. Во сколько раз площадь боковой поверхности второй кружки больше площади боковой поверхности первой кружки?
- A21.** а) Найдите площадь основания цилиндра, осевым сечением которого является квадрат площадью $\frac{16}{\pi}$.
 б) Найдите площадь основания цилиндра, осевым сечением которого является квадрат площадью $\frac{36}{\pi}$.
- A22.** а) Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите площадь основания цилиндра, если диагональ осевого сечения равна $\frac{12}{\sqrt{\pi}}$.
 б) Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите площадь основания цилиндра, если диагональ осевого сечения равна $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$.

- A23.** а) Найдите объём цилиндра, радиус основания которого равен 7, а высота равна 2.
б) Найдите объём цилиндра, радиус основания которого равен 3, а высота равна 5.
- A24.** а) Объём цилиндра равен 21π , площадь его основания равна 7π . Найдите высоту цилиндра.
б) Объём цилиндра равен 40π , площадь его основания равна 8π . Найдите высоту цилиндра.
- A25.** а) Объём цилиндра равен 72, его высота равна 9. Найдите площадь основания цилиндра.
б) Объём цилиндра равен 81, его высота равна 3. Найдите площадь основания цилиндра.
- A26.** а) Осевое сечение цилиндра является квадратом. Найдите высоту цилиндра, если его объём равен 250π .
б) Осевое сечение цилиндра является квадратом. Найдите радиус основания цилиндра, если его объём равен 54π .
- A27.** а) Объём цилиндра равен 1,5. Радиус основания цилиндра увеличили в 2 раза, а его высоту уменьшили в 3 раза. Найдите объём получившегося цилиндра.
б) Объём цилиндра равен 1. Радиус основания цилиндра уменьшили в 2 раза, а его высоту увеличили в 3 раза. Найдите объём получившегося цилиндра.
- A28.** а) Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне 90 см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания втрое больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.



б) Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне 60 см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания вдвое меньше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.

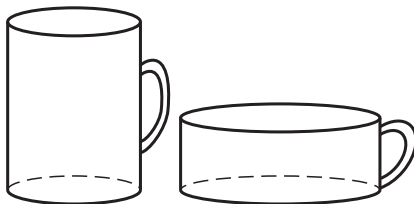
A29. а) В цилиндрический сосуд налили 2900 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 8 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в кубических сантиметрах.

б) В цилиндрический сосуд налили 2800 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 16 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в кубических сантиметрах.

A30. а) В цилиндрический сосуд налили 8 см^3 воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,1 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в кубических сантиметрах.

б) В цилиндрический сосуд налили 8 см^3 воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,8 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в кубических сантиметрах.

A31. а) Первая цилиндрическая кружка вдвое выше второй, а вторая в четыре раза шире первой. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой кружки.



б) Первая цилиндрическая кружка втрое выше второй, а вторая в три раза шире первой. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой кружки.

- A32.** а) Цилиндрическая кастрюля, диаметр дна которой равен 30 см, наполнена водой. Какое минимальное число кастрюль той же высоты и с диаметром дна, равным 15 см, потребуется для того, чтобы перелить в них эту воду?
- б) Цилиндрическая кастрюля, диаметр дна которой равен 36 см, наполнена водой. Какое минимальное число кастрюль той же высоты и с диаметром дна, равным 12 см, потребуется для того, чтобы перелить в них эту воду?
- A33.** а) Расстояние от точки на окружности нижнего основания цилиндра до центра его верхнего основания равно 13, образующая цилиндра равна 12. Найдите объём цилиндра.
- б) Расстояние от точки на окружности нижнего основания цилиндра до центра его верхнего основания равно 10, образующая цилиндра равна 8. Найдите объём цилиндра.
- A34.** а) В цилиндре проведено сечение, параллельное основаниям и делящее его высоту на два отрезка длиной 8 и 2, считая от верхнего основания. Во сколько раз объём большего отсечённого цилиндра больше объёма меньшего отсечённого цилиндра?
- б) В цилиндре проведено сечение, параллельное основаниям и делящее его высоту на два отрезка длиной 15 и 5, считая от верхнего основания. Во сколько раз объём большего отсечённого цилиндра больше объёма меньшего отсечённого цилиндра?

Уровень В

- B1.** а) Радиус основания цилиндра равен 5, высота цилиндра равна 8. Плоскость α , параллельная оси цилиндра, удалена от неё на расстояние, равное 4. Найдите угол между осью цилиндра и диагональю прямоугольника, являющегося сечением цилиндра плоскостью α .
- б) Радиус основания цилиндра равен 13, высота цилиндра равна 48. Плоскость α , параллельная оси цилиндра, удалена от неё на расстояние, равное 5. Найдите угол между осью цилиндра и диагональю прямоугольника, являющегося сечением цилиндра плоскостью α .

- В2.** а) Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, его образующая равна 28. Плоскость α пересекает основания цилиндра по хордам длиной 12 и 16. Пусть точки M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра. Найдите, в каком отношении точка P делит ось цилиндра.
- б) Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, его образующая равна 21. Плоскость α пересекает основания цилиндра по хордам длиной 24 и 10. Пусть точки M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра. Найдите, в каком отношении точка P делит ось цилиндра.
- В3.** а) Точки A и B лежат на окружности одного, а точки C и D — на окружности другого основания цилиндра, при этом $ABCD$ — квадрат. Найдите сторону квадрата, если известно, что радиус основания цилиндра равен 2, а высота равна 4.
- б) Точки A и B лежат на окружности одного, а точки C и D — на окружности другого основания цилиндра, при этом $ABCD$ — квадрат. Найдите высоту цилиндра, если известно, что радиус основания цилиндра равен 6, а диагональ квадрата равна 13.

Уровень С

- С1.** а) Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость α пересекает его основания по хордам длиной 12 и 16. Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей цилиндра относятся как 3 : 4. Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.
- б) Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость α пересекает его основания по хордам длиной 24 и 10. Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей цилиндра относятся как 5 : 12. Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.
- С2.** а) Основания цилиндра — сечения шара плоскостями, перпендикулярными его диаметру. Докажите, что квадрат образующей цилиндра равен разности квадратов диаметров шара и основания цилиндра. Найдите высоту цилиндра наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса $\sqrt{3}$.

б) Основания цилиндра — сечения шара плоскостями, перпендикулярными его диаметру. Докажите, что квадрат образующей цилиндра равен разности квадратов диаметров шара и основания цилиндра. Найдите высоту цилиндра наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса 3.

С3. а) Точка A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а точка B — на окружности его верхнего основания, причём отрезок AB пересекает ось цилиндра. Точка C — середина одной из образующих цилиндра. Найдите угол ACB , если диаметр основания цилиндра равен $\sqrt{19}$, $AC = 3$, $BC = 5$.

б) Точка A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а точка B — на окружности его верхнего основания, причём отрезок AB пересекает ось цилиндра. Точка C — середина одной из образующих цилиндра. Найдите угол ACB , если диаметр основания цилиндра равен $\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{3}$, $BC = 2$.

6.2. Конус

Уровень А

A1. а) Высота конуса равна 15, а его образующая равна 17. Найдите диаметр основания конуса.

б) Высота конуса равна 40, а его образующая равна 41. Найдите диаметр основания конуса.

A2. а) Высота конуса равна 12, диаметр его основания равен 10. Найдите образующую конуса.

б) Высота конуса равна 12, диаметр его основания равен 18. Найдите образующую конуса.

A3. а) Диаметр основания конуса равен 48, его образующая равна 26. Найдите высоту конуса.

б) Диаметр основания конуса равен 54, его образующая равна 45. Найдите высоту конуса.

A4. а) Образующая конуса равна 14 и составляет с плоскостью его основания угол 60° . Найдите радиус основания конуса.

б) Образующая конуса равна 18 и составляет с плоскостью его основания угол 60° . Найдите радиус основания конуса.

- A5.** а) Образующая конуса равна 8 и составляет с плоскостью его основания угол 30° . Найдите высоту конуса.
б) Образующая конуса равна 16 и составляет с плоскостью его основания угол 30° . Найдите высоту конуса.
- A6.** а) Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади его основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.
б) Площадь боковой поверхности конуса в $\sqrt{2}$ раз больше площади его основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.
- A7.** а) Высота конуса равна 16, площадь осевого сечения равна 192. Найдите образующую конуса.
б) Высота конуса равна 12, площадь осевого сечения равна 108. Найдите образующую конуса.
- A8.** а) Высота конуса равна 12, а его образующая равна 13. Найдите площадь осевого сечения конуса.
б) Высота конуса равна 15, а его образующая равна 17. Найдите площадь осевого сечения конуса.
- A9.** а) Площадь основания конуса равна 9π , а его высота равна 5. Найдите площадь осевого сечения конуса.
б) Площадь основания конуса равна 25π , а его высота равна 2. Найдите площадь осевого сечения конуса.
- A10.** а) Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник площадью 25. Найдите радиус основания конуса.
б) Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник площадью 36. Найдите радиус основания конуса.
- A11.** а) Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь, если радиус основания конуса равен 7.
б) Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь, если радиус основания конуса равен 8.
- A12.** а) Площадь боковой поверхности конуса равна 54, длина окружности его основания равна 18. Найдите образующую конуса.
б) Площадь боковой поверхности конуса равна 66, длина окружности его основания равна 11. Найдите образующую конуса.
- A13.** а) Длина окружности основания конуса равна 7, его образующая равна 6. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

б) Длина окружности основания конуса равна 8, его образующая равна 5. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

A14. а) Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найдите радиус основания конуса, если площадь боковой поверхности конуса равна 50π .

б) Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найдите радиус основания конуса, если площадь боковой поверхности конуса равна 32π .

A15. а) Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найдите образующую конуса, если площадь боковой поверхности конуса равна 32π .

б) Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найдите образующую конуса, если площадь боковой поверхности конуса равна 8π .

A16. а) Радиус основания конуса равен 8, его образующая равна 17. Найдите площадь осевого сечения конуса.

б) Радиус основания конуса равен 5, его образующая равна 13. Найдите площадь осевого сечения конуса.

A17. а) Радиус основания конуса в 5 раз меньше его образующей. Во сколько раз площадь полной поверхности конуса больше площади его боковой поверхности?

б) Радиус основания конуса в 10 раз меньше его образующей. Во сколько раз площадь полной поверхности конуса больше площади его боковой поверхности?

A18. а) Один из углов осевого сечения конуса равен 120° , высота конуса равна 4. Найдите площадь основания конуса.

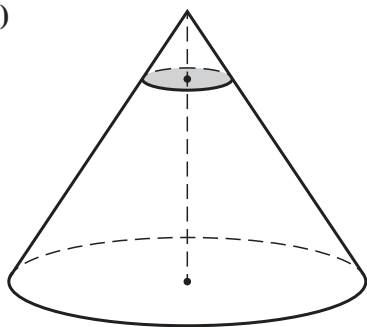
б) Один из углов осевого сечения конуса равен 60° , высота конуса равна 6. Найдите площадь основания конуса.

A19. а) Площадь полной поверхности конуса равна 64. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее его высоту пополам. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.

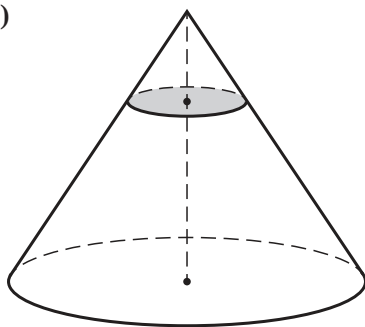
б) Площадь полной поверхности конуса равна 144. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее его высоту в отношении $1 : 3$, считая от вершины. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.

- A20.** а) Образующая конуса наклонена к основанию под углом 60° . Найдите площадь основания, если площадь боковой поверхности конуса равна 84.
- б) Образующая конуса наклонена к основанию под углом 60° . Найдите площадь основания, если площадь боковой поверхности конуса равна 78.
- A21.** а) Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь боковой поверхности конуса, если площадь его основания равна 23.
- б) Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь боковой поверхности конуса, если площадь его основания равна 33.
- A22.** а) Площадь основания конуса равна 75. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 2 и 3, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.
- б) Площадь основания конуса равна 98. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 2 и 5, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.
- A23.** а) Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 1 и 3, считая от вершины. Найдите площадь основания конуса, если площадь сечения конуса этой плоскостью равна 2.

а)



б)



- б) Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 1 и 2, считая от вершины. Найдите площадь основания конуса, если площадь сечения конуса этой плоскостью равна 3.

- A24.** а) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 17 раз, а радиус основания не изменится?
б) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 28 раз, а радиус основания не изменится?
- A25.** а) Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 22 раза, а образующая не изменится?
б) Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 45 раз, а образующая не изменится?
- A26.** а) Радиус основания первого конуса в 3 раза меньше радиуса основания второго конуса, а высота первого конуса в 2 раза больше высоты второго конуса. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго конуса равна 18?
б) Радиус основания первого конуса в 2 раза меньше радиуса основания второго конуса, а образующая первого конуса в 3 раза больше образующей второго конуса. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго конуса равна 22?
- A27.** а) Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны 5 и 12 соответственно, а второго — 2 и 6 соответственно. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса меньше площади боковой поверхности первого конуса?
б) Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны 5 и 6 соответственно, а второго — 3 и 4 соответственно. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого конуса больше площади боковой поверхности второго конуса?
- A28.** а) Объём конуса равен 24π , его высота равна 8. Найдите радиус основания конуса.
б) Объём конуса равен 60π , его высота равна 5. Найдите радиус основания конуса.

- A29.** а) Объём конуса равен 24π , радиус его основания равен 2. Найдите высоту конуса.
б) Объём конуса равен 16π , радиус его основания равен 2. Найдите высоту конуса.
- A30.** а) Найдите объём конуса, площадь боковой поверхности которого равна 80π , а площадь полной поверхности равна 144π .
б) Найдите объём конуса, площадь боковой поверхности которого равна 60π , а площадь полной поверхности равна 96π .
- A31.** а) Найдите объём конуса, радиус основания которого равен 5, а высота равна 6.
б) Найдите объём конуса, радиус основания которого равен 4, а высота равна 3.
- A32.** а) Найдите объём конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5.
б) Найдите объём конуса, радиус основания которого равен 5, а образующая равна 13.
- A33.** а) Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 36. Найдите объём конуса.
б) Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 9. Найдите объём конуса.
- A34.** а) Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, боковая сторона которого равна $12\sqrt{2}$. Найдите объём конуса.
б) Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, боковая сторона которого равна $9\sqrt{2}$. Найдите объём конуса.
- A35.** а) Высота конуса равна 3, длина окружности его основания равна 8π . Найдите объём конуса.
б) Высота конуса равна 6, длина окружности его основания равна 12π . Найдите объём конуса.
- A36.** а) Длина образующей конуса равна 5, длина окружности его основания равна 6π . Найдите объём конуса.

б) Длина образующей конуса равна 5, длина окружности его основания равна 8π . Найдите объём конуса.

A37. а) Образующая конуса равна 13 и составляет с плоскостью основания угол, синус которого равен $\frac{12}{13}$. Найдите объём конуса.

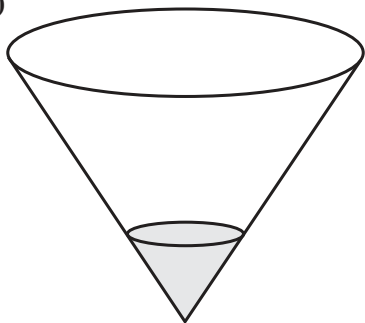
б) Образующая конуса равна 5 и составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$. Найдите объём конуса.

A38. а) Радиус основания первого конуса в 6 раз больше радиуса основания второго конуса, а высота первого конуса в 4 раза меньше высоты второго конуса. Чему равен объём первого конуса, если объём второго конуса равен 14?

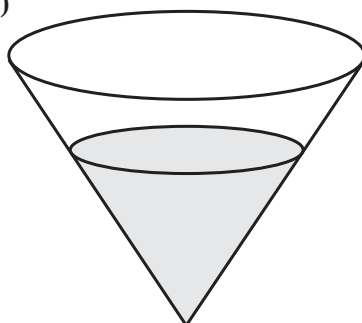
б) Радиус основания первого конуса в 3 раза меньше радиуса основания второго конуса, а высота первого конуса в 5 раз больше высоты второго конуса. Чему равен объём первого конуса, если объём второго конуса равен 18?

A39. а) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём сосуда 540 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.

а)



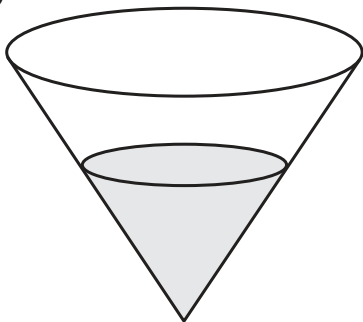
б)



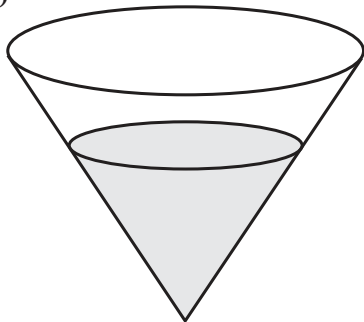
б) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём сосуда 270 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.

- A40.** а) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 42 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы целиком наполнить сосуд?

а)



б)

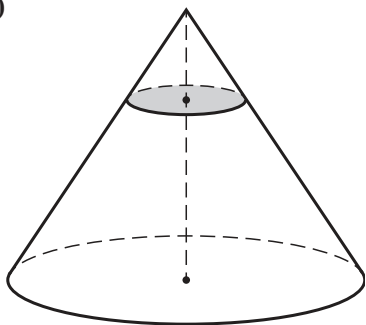


- б) В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 240 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы целиком наполнить сосуд?
- A41.** а) Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высота уменьшится в 5 раз, а радиус основания не изменится?
б) Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высота уменьшится в 8 раз, а радиус основания не изменится?
- A42.** а) Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 2 раза, а высота не изменится?
б) Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 11 раз, а высота не изменится?
- A43.** а) Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 3 раза, а высота уменьшится в 1,5 раза?
б) Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 6 раз, а высота уменьшится в 4 раза?
- A44.** а) Даны два конуса. Радиус основания и высота первого конуса равны 10 и 3 соответственно, а второго — 5 и 6 соответственно. Во сколько раз объём первого конуса больше объёма второго конуса?

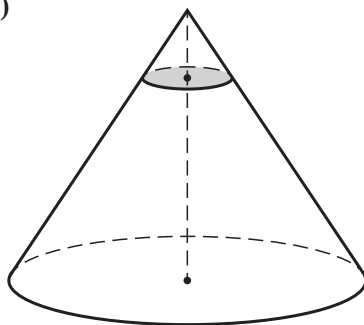
б) Даны два конуса. Радиус основания и высота первого конуса равны 12 и 2 соответственно, а второго — 4 и 6 соответственно. Во сколько раз объём первого конуса больше объёма второго конуса?

A45. а) Через точку, делящую высоту конуса в отношении $1:2$, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная его основанию. Найдите объём конуса, если объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью, равен 20.

а)



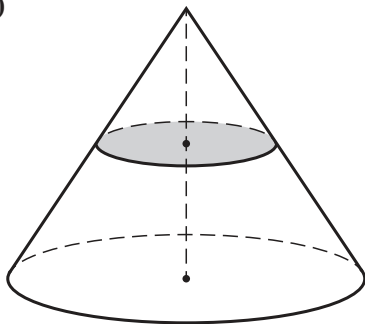
б)



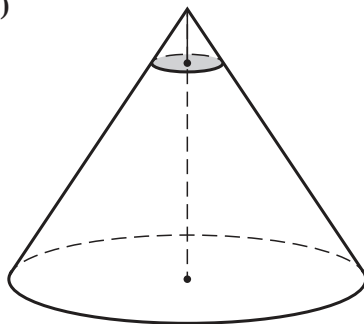
б) Через точку, делящую высоту конуса в отношении $1:3$, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная его основанию. Найдите объём конуса, если объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью, равен 10.

A46. а) Объём конуса равен 32. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная его основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью.

а)



б)



б) Объём конуса равен 250. Через точку, делящую высоту конуса в отношении $1:4$, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная его основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью.

Уровень В

- В1.** а) Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны, равной 3. Найдите объём полученного тела вращения.
б) Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны, равной 5. Найдите объём полученного тела вращения.
- В2.** а) Прямоугольный треугольник с катетами 6 и 2 вращается вокруг большего катета. Найдите объём полученного тела вращения.
б) Прямоугольный треугольник с катетами 3 и 8 вращается вокруг меньшего катета. Найдите объём полученного тела вращения.
- В3.** а) Радиус основания прямого кругового конуса равен $2\sqrt{3}$, угол в осевом сечении равен 60° . Плоскость α проходит через вершину конуса и хорду основания, равную $2\sqrt{3}$. Найдите площадь сечения конуса плоскостью α .
б) Радиус основания прямого кругового конуса равен $\sqrt{3}$, угол в осевом сечении равен 60° . Плоскость α проходит через вершину конуса и хорду основания, равную $\sqrt{3}$. Найдите площадь сечения конуса плоскостью α .
- В4.** а) Радиус основания прямого кругового конуса равен $2\sqrt{3}$, угол в осевом сечении равен 60° . Хорда AB основания равна $2\sqrt{3}$. Найдите угол между образующей конуса, проходящей через точку B , и диаметром основания, проходящим через точку A .
б) Радиус основания прямого кругового конуса равен $3\sqrt{2}$, угол в осевом сечении равен 60° . Хорда AB основания равна $3\sqrt{2}$. Найдите угол между образующей конуса, проходящей через точку B , и диаметром основания, проходящим через точку A .
- В5.** а) Радиус основания прямого кругового конуса равен $4\sqrt{5}$, угол в осевом сечении равен 60° . Хорда AB основания равна $4\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостями, проходящими через ось конуса и точки A и B соответственно.

- б) Радиус основания прямого кругового конуса равен $2\sqrt{5}$, угол в осевом сечении равен 60° . Хорда AB основания равна $2\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостями, проходящими через ось конуса и точки A и B соответственно.
- B6.** а) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением квадрата $ABCD$ вокруг прямой BD , если сторона квадрата равна 1.
 б) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением квадрата $ABCD$ вокруг прямой BD , если сторона квадрата равна 2.
- B7.** а) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением квадрата $ABCD$ вокруг перпендикуляра к диагонали DB , проведённого через точку B , если сторона квадрата равна 1.
 б) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением квадрата $ABCD$ вокруг перпендикуляра к диагонали DB , проведённого через точку B , если сторона квадрата равна 2.
- B8.** а) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ площадью, равной 1, вокруг стороны BC .
 б) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ площадью, равной 4, вокруг стороны BC .
- B9.** а) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом A , равным 60° , вокруг прямой AC .
 б) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом A , равным 60° , вокруг прямой BD .
- B10.** а) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами 5 и 12 вокруг внешней оси, параллельной большему катету и отстоящему от него на расстояние, равное 3.
 б) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами 12 и 15 вокруг внешней оси, параллельной большему катету и отстоящему от него на расстояние, равное 3.

- B11.** а) Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг оси, проходящей через вершину C параллельно диагонали BD .
- б) Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг перпендикуляра к диагонали BD , проведённого через её конец B .
- B12.** а) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом A , равным 60° , вокруг оси, проведённой через вершину C перпендикулярно стороне DC .
- б) Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 4, и острым углом A , равным 60° , вокруг оси, проведённой через вершину C перпендикулярно стороне DC .

Уровень C

- C1.** а) Радиус основания прямого кругового конуса равен $2\sqrt{3}$, угол в осевом сечении равен 60° . Плоскость α проходит через вершину конуса и хорду основания, равную $2\sqrt{3}$. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости α .
- б) Радиус основания прямого кругового конуса равен $2\sqrt{15}$, угол в осевом сечении равен 60° . Плоскость α проходит через вершину конуса и хорду основания, равную $2\sqrt{15}$. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости α .
- C2.** а) Косинус угла при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен $\frac{7}{8}$. Докажите, что площадь полной поверхности конуса в пять раз больше площади его основания. Найдите угол сектора, который получается при развёртке боковой поверхности конуса.
- б) Косинус угла при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен $\frac{7}{9}$. Докажите, что площадь полной поверхности конуса в четыре раза больше площади его основания. Найдите угол сектора, который получается при развёртке боковой поверхности конуса.

- С3.** а) Высота прямого кругового конуса равна 6, радиус основания равен 8. Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 50. Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.
- б) Высота прямого кругового конуса равна 4, радиус основания равен $\sqrt{34}$. Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 25. Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.
- С4.** а) Три прямых круговых конуса с углом 60° при вершине осевого сечения имеют общую вершину и попарно касаются друг друга. Найдите углы между образующими, по которым касаются эти конусы.
- б) Три прямых круговых конуса с углом 90° при вершине осевого сечения имеют общую вершину и попарно касаются друг друга. Найдите углы между образующими, по которым касаются эти конусы.

6.3. Сфера и шар

Уровень А

- A1.** а) Шар пересечён плоскостью на расстоянии 4 от его центра. Найдите радиус сечения, если радиус шара равен 5.
- б) Шар пересечён плоскостью на расстоянии 5 от его центра. Найдите радиус сечения, если радиус шара равен 13.
- A2.** а) Шар пересечён плоскостью на расстоянии 8 от его центра. Найдите радиус шара, если радиус сечения равен 15.
- б) Шар пересечён плоскостью на расстоянии 24 от его центра. Найдите радиус шара, если радиус сечения равен 7.
- A3.** а) Шар диаметром 20 пересечён плоскостью. Найдите расстояние от этого сечения до центра шара, если радиус сечения равен 8.
- б) Шар диаметром 26 пересечён плоскостью. Найдите расстояние от этого сечения до центра шара, если радиус сечения равен 12.
- A4.** а) Шар пересечён двумя параллельными плоскостями, расположенными по одну сторону от его центра. Радиус первого сечения равен 12, радиус второго сечения равен 9. Расстояние от центра шара до плоскости первого сечения равно 9. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

б) Шар пересечён двумя параллельными плоскостями, расположенными по одну сторону от его центра. Радиус первого сечения равен 12, радиус второго сечения равен 5. Расстояние от центра шара до плоскости второго сечения равно 12. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

A5. а) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Найдите радиус шара, если длина окружности сечения равна $7\sqrt{3}\pi$.

б) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Найдите радиус шара, если длина окружности сечения равна $9\sqrt{3}\pi$.

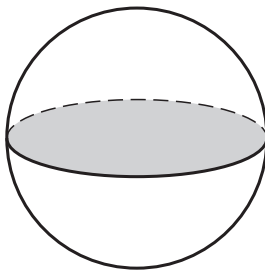
A6. а) Шар пересечён плоскостью так, что радиус сечения в 5 раз меньше радиуса шара. Найдите радиус шара, если площадь сечения равна 4π .

б) Шар пересечён плоскостью так, что радиус сечения в 3 раза меньше радиуса шара. Найдите радиус шара, если площадь сечения равна 16π .

A7. а) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Найдите радиус шара, если площадь сечения равна 192π .

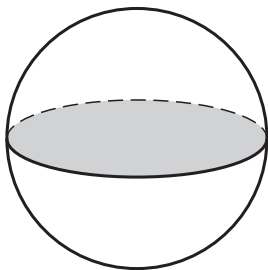
б) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Найдите радиус шара, если площадь сечения равна 147π .

A8. а) Площадь большого круга шара равна 7. Найдите площадь поверхности шара.



б) Площадь большого круга шара равна 8. Найдите площадь поверхности шара.

- A9.** а) Площадь поверхности шара равна 120. Найдите площадь большого круга шара.

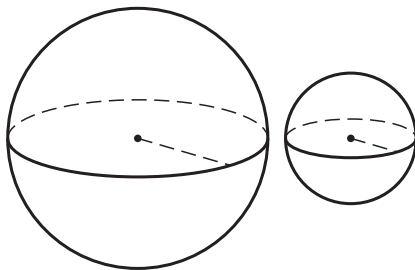


- б) Площадь поверхности шара равна 16. Найдите площадь большого круга шара.

- A10.** а) Шар пересечён плоскостью так, что радиус сечения в 2 раза меньше радиуса шара. Найдите площадь поверхности шара, если площадь сечения равна 3.

- б) Шар пересечён плоскостью так, что радиус сечения в 3 раза меньше радиуса шара. Найдите площадь сечения, если площадь поверхности шара равна 72.

- A11.** а) Даны два шара с радиусами 9 и 3. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго шара?



- б) Даны два шара с радиусами 6 и 1. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго шара?

- A12.** а) Радиусы двух шаров равны 12 и 16. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

- б) Радиусы двух шаров равны 5 и 12. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.
- A13.** а) Даны два шара. Радиус первого шара в 4 раза больше радиуса второго шара. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго шара?
- б) Даны два шара. Радиус первого шара в 5 раз больше радиуса второго шара. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго шара?
- A14.** а) У шарообразной капсулы из свинца площадь поверхности внутренней сферы равна 16π , а площадь поверхности внешней сферы равна 144π . Найдите толщину капсулы, если известно, что внешняя и внутренняя сферы имеют общий центр.
- б) У шарообразной капсулы из свинца площадь поверхности внутренней сферы равна 36π , а площадь поверхности внешней сферы равна 100π . Найдите толщину капсулы, если известно, что внешняя и внутренняя сферы имеют общий центр.
- A15.** а) Во сколько раз увеличится объём шара, если его радиус увеличить в 3 раза?
- б) Во сколько раз увеличится объём шара, если его радиус увеличить в 2 раза?
- A16.** а) Даны два шара с радиусами 5 и 1. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго шара?
- б) Даны два шара с радиусами 8 и 4. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго шара?
- A17.** а) Площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго шара в 16 раз. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго шара?
- б) Площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго шара в 36 раз. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго шара?
- A18.** а) Объём первого шара в 125 раз больше объёма второго шара. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго шара?

б) Объём первого шара в 1000 раз больше объёма второго шара. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго шара?

A19. а) Сколько нужно взять металлических шариков радиуса 4, чтобы, расплавив их, отлить шар радиуса 16?

б) Сколько нужно взять металлических шариков радиуса 1, чтобы, расплавив их, отлить шар радиуса 5?

A20. а) Металлический шар весит 540 г. Сколько граммов будет весить шарик втрое меньшего радиуса, отлитый из того же металла?

б) Металлический шар весит 640 г. Сколько граммов будет весить шарик вдвое меньшего радиуса, отлитый из того же металла?

A21. а) Бетонный шар весит 1,3 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

б) Бетонный шар весит 0,8 т. Сколько тонн будет весить шар втрое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

A22. а) Металлический шар диаметром 32 см расплавили для того, чтобы изготовить шарики диаметром 8 см. Какое максимальное число таких шариков можно изготовить?

б) Металлический шар диаметром 60 см расплавили для того, чтобы изготовить шарики диаметром 12 см. Какое максимальное число таких шариков можно изготовить?

Уровень В

B1. а) Шар пересечён двумя параллельными плоскостями так, что расстояние от центра шара до первой плоскости равно 3, а до второй — 4. Найдите длину окружности второго сечения шара, если длина окружности первого сечения шара равна 8π.

б) Шар пересечён двумя параллельными плоскостями так, что расстояние от центра шара до первой плоскости равно 5, а до второй — 12. Найдите длину окружности второго сечения шара, если длина окружности первого сечения шара равна 24π.

В2. а) Шар пересечён двумя параллельными плоскостями так, что расстояние от центра шара до первой плоскости равно 5. Найдите расстояние между плоскостями, если площадь первого сечения шара равна 225π , а площадь второго — 81π .

б) Шар пересечён двумя параллельными плоскостями так, что расстояние от центра шара до первой плоскости равно 6. Найдите расстояние между плоскостями, если площадь первого сечения шара равна 289π , а площадь второго — 225π .

В3. а) Лежит ли точка $A(3; -2; 1)$ на сфере, заданной уравнением

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 6?$$

б) Лежит ли точка $A(-2; 3; 5)$ на сфере, заданной уравнением

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 5)^2 = 100?$$

В4. а) Дан шар с центром $O(3; 2; 1)$ и радиусом 5. Лежит ли точка $K(2; 1; 0)$ внутри этого шара?

б) Дан шар с центром $O(-5; 2; 0)$ и радиусом 2. Лежит ли точка $K(-4; 1; 1)$ внутри этого шара?

В5. а) Найдите координаты центра сферы, заданной уравнением

$$x^2 + 4x + y^2 - 8y + z^2 + z = 110.$$

б) Найдите координаты центра сферы, заданной уравнением

$$2x - x^2 - y^2 - 4y - z^2 + 8z = 3.$$

Уровень С

С1. а) Две параллельные плоскости проведены по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости образуют в сечении две окружности, длины которых равны 18π и 24π . Точка H — ортогональная проекция произвольной точки меньшей окружности на плоскость большей окружности. Докажите, что точка H делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении $1 : 7$. Найдите объём шара, ограниченного данной сферой.

б) Две параллельные плоскости проведены по одну сторону от центра сферы на расстоянии 7 друг от друга. Эти плоскости образуют в сечении две окружности, длины которых равны 9π и 16π. Точка H — ортогональная проекция произвольной точки меньшей окружности на плоскость большей окружности. Докажите, что точка H делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении 7 : 25. Найдите площадь поверхности сферы.

С2. а) На сфере, заданной уравнением

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 3,$$

найдите точку, наиболее удалённую от начала координат.

б) На сфере, заданной уравнением

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 11,$$

найдите точку, наиболее удалённую от начала координат.

С3. а) Точки A, B, C, D имеют координаты $A(2; 2; 0), B(4; 2; -2), C(2; 2; -2), D(4; 0; -2)$. Запишите уравнение сферы, проходящей через эти точки.

б) Точки A, B, C, D имеют координаты $A(3; 5; 1), B(1; 3; 1), C(3; 3; -1), D(1; 5; -1)$. Запишите уравнение сферы, проходящей через эти точки.

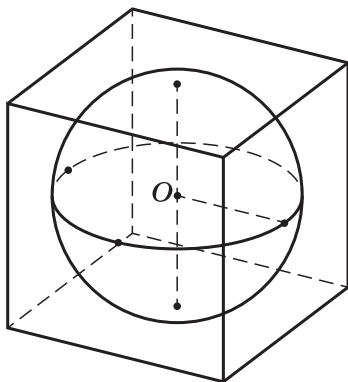
С4. а) Плоскость α проходит через центр сферы. На сфере выбрана произвольная точка A , не лежащая в плоскости α . Точка O — проекция точки A на плоскость α . Через точку O в плоскости α проведена прямая, пересекающая сферу в точках B и C . Найдите длину отрезка AO , если $OB : OC = 1 : 4$, а $BC = 20$.

б) Плоскость α проходит через центр сферы. На сфере выбрана произвольная точка A , не лежащая в плоскости α . Точка O — проекция точки A на плоскость α . Через точку O в плоскости α проведена прямая, пересекающая сферу в точках B и C . Найдите длину отрезка AO , если $OB : OC = 2 : 3$, а $BC = 10\sqrt{6}$.

6.4. Комбинации тел вращения и многогранников

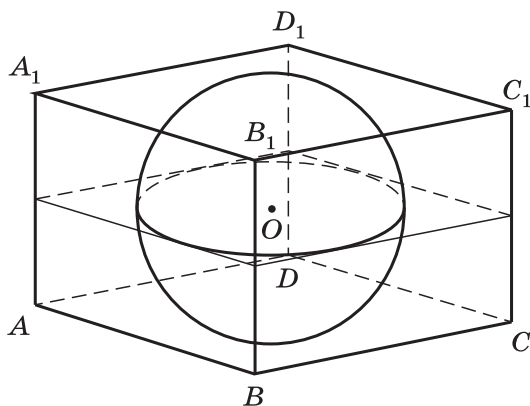
Уровень А

- A1.** а) Шар вписан в куб. Найдите радиус шара, если диагональ куба равна $8\sqrt{3}$.



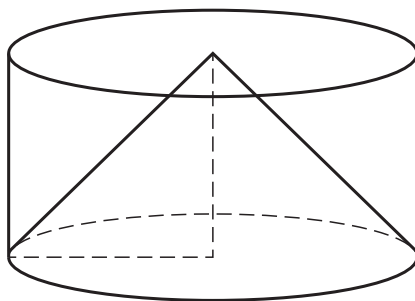
- б) Шар вписан в куб. Найдите радиус шара, если диагональ куба равна $14\sqrt{3}$.
- A2.** а) Конус вписан в правильную четырёхугольную призму. Основание конуса вписано в основание призмы, а вершина конуса лежит на другом основании призмы. Найдите сторону основания призмы, если образующая конуса равна 17, а высота равна 15.
- б) Конус вписан в правильную четырёхугольную призму. Основание конуса вписано в основание призмы, а вершина конуса лежит на другом основании призмы. Найдите образующую конуса, если сторона основания призмы равна 12, а высота равна 8.
- A3.** а) В шар вписан куб. Найдите радиус шара, если ребро куба равно $12\sqrt{3}$.
- б) В шар вписан куб. Найдите радиус шара, если ребро куба равно $10\sqrt{3}$.
- A4.** а) В шар вписан куб. Найдите ребро куба, если радиус шара равен $9\sqrt{3}$.
- б) В шар вписан куб. Найдите ребро куба, если радиус шара равен $11\sqrt{3}$.

- A5.** а) Около конуса описана сфера, причём сфера содержит окружность основания конуса и его вершину. Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $3\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.
- б) Около конуса описана сфера, причём сфера содержит окружность основания конуса и его вершину. Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $23\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.
- A6.** а) Около конуса описана сфера, причём сфера содержит окружность основания конуса и его вершину. Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $7\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.
- б) Около конуса описана сфера, причём сфера содержит окружность основания конуса и его вершину. Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $19\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.
- A7.** а) В прямоугольный параллелепипед вписана сфера радиуса 5. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.



- б) В прямоугольный параллелепипед вписана сфера радиуса 3. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
- A8.** а) Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

- б) Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 7. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
- A9.** а) В цилиндр вписана сфера. Площадь поверхности цилиндра равна 39. Найдите площадь поверхности сферы.
 б) В цилиндр вписана сфера. Площадь поверхности цилиндра равна 42. Найдите площадь поверхности сферы.
- A10.** а) Сфера вписана в цилиндр. Площадь поверхности сферы равна 300. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
 б) Сфера вписана в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 300. Найдите площадь поверхности сферы.
- A11.** а) Цилиндр описан около шара, площадь поверхности которого равна 24. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
 б) Около шара описан цилиндр, площадь полной поверхности которого равна 12. Найдите площадь поверхности шара.
- A12.** а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $36\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



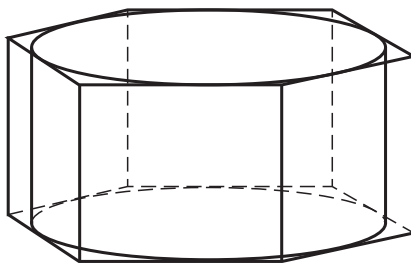
- б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $12\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
- A13.** а) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $13\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

б) Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $9\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

A14. а) Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 12. Площадь боковой поверхности призмы равна 288. Найдите высоту цилиндра.

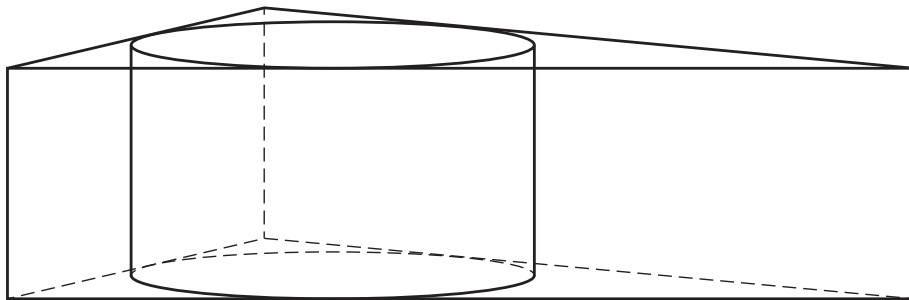
б) Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 64. Найдите высоту цилиндра.

A15. а) Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{12}$, а высота равна 4.



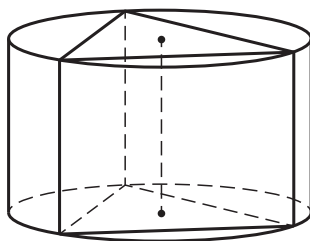
б) Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{75}$, а высота равна 1.

A16. а) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{27}$, а высота равна 3.



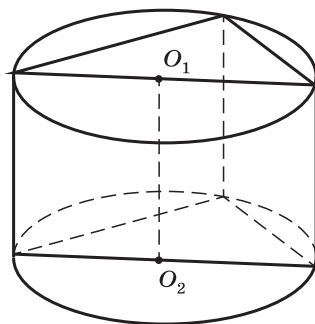
б) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{12}$, а высота равна 3.

A17. а) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $6\sqrt{3}$, а высота равна 3.



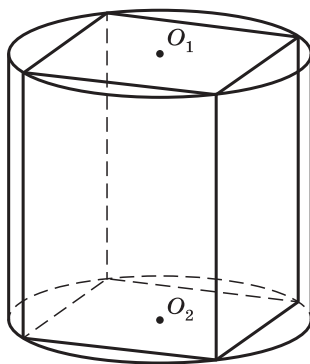
б) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $4\sqrt{3}$, а высота равна 2.

A18. а) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 1. Боковое ребро призмы равно $\frac{2}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



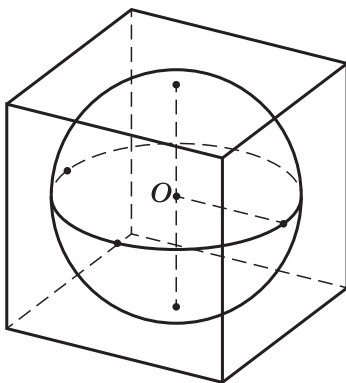
б) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковое ребро призмы равно $\frac{5}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

- A19.** а) В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Боковое ребро призмы равно $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



- б) В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 6. Боковое ребро призмы равно $\frac{3}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

- A20.** а) Куб описан около сферы радиуса 10. Найдите объём куба.

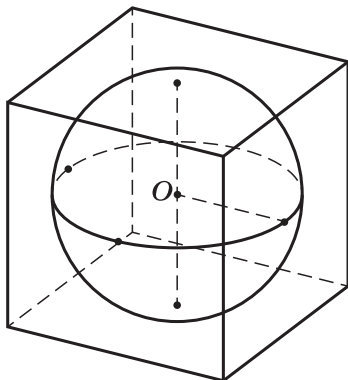


- б) Куб описан около сферы радиуса 2. Найдите объём куба.

- A21.** а) Куб вписан в шар радиуса $5\sqrt{3}$. Найдите объём куба.

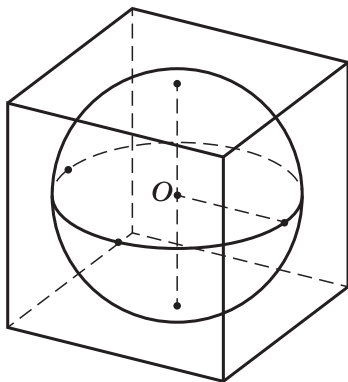
- б) Куб вписан в шар радиуса $3\sqrt{3}$. Найдите объём куба.

A22. а) Объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 125. Найдите радиус сферы.



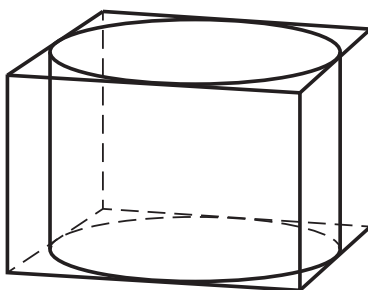
б) Объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 27. Найдите радиус сферы.

A23. а) Шар, объём которого равен 7π , вписан в куб. Найдите объём куба.



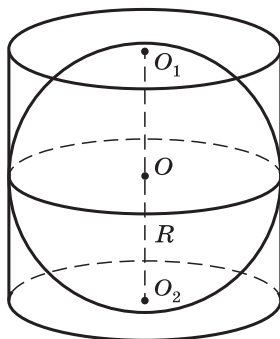
б) Шар, объём которого равен 9π , вписан в куб. Найдите объём куба.

A24. а) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3. Объём параллелепипеда равен 144. Найдите высоту цилиндра.



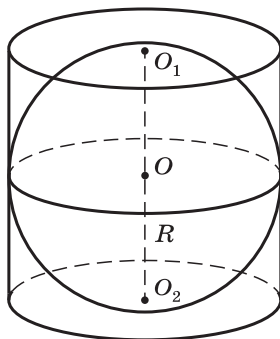
б) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 320. Найдите высоту цилиндра.

A25. а) Цилиндр, объем которого равен 72, описан около шара. Найдите объем шара.

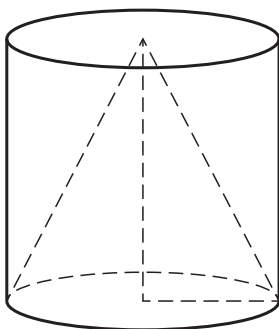


б) Цилиндр, объем которого равен 36, описан около шара. Найдите объем шара.

A26. а) Шар, объем которого равен 68, вписан в цилиндр. Найдите объем цилиндра.

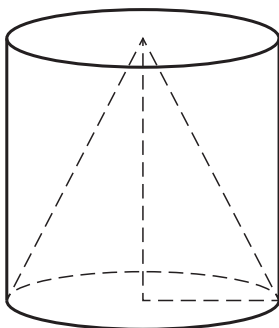


- б) Шар, объём которого равен 60, вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.
- A27.** а) Во сколько раз объём шара больше объёма конуса, высота и радиус основания которого равны радиусу шара?
б) Во сколько раз объём шара меньше объёма конуса, высота и радиус основания которого равны диаметру шара?
- A28.** а) Шар, объём которого равен 8 м^3 , вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.
б) Шар, объём которого равен 6 м^3 , вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.
- A29.** а) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 3 и 5 соответственно. Найдите объём параллелепипеда.
б) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2 и 7 соответственно. Найдите объём параллелепипеда.
- A30.** а) Правильная треугольная призма вписана в цилиндр. Найдите объём призмы, если объём цилиндра равен $8\pi\sqrt{3}$.
б) Правильная треугольная призма вписана в цилиндр. Найдите объём призмы, если объём цилиндра равен $12\pi\sqrt{3}$.
- A31.** а) Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 28. Найдите объём цилиндра.
б) Цилиндр описан около шара. Объём цилиндра равен 39. Найдите объём шара.
- A32.** а) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 5. Найдите объём шара.
б) Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 32. Найдите объём конуса.
- A33.** а) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Найдите объём конуса, если объём цилиндра равен 30.



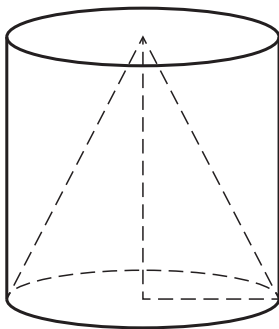
б) Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту. Найдите объём конуса, если объём цилиндра равен 144.

A34. а) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Найдите объём цилиндра, если объём конуса равен 30.



б) Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту. Найдите объём цилиндра, если объём конуса равен 18.

A35. а) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Объём цилиндра равен 111. Найдите объём конуса.



б) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Объем цилиндра равен 138. Найдите объем конуса.

A36. а) Вокруг цилиндра описана правильная треугольная призма. Найдите объем призмы, если объем цилиндра равен $2\pi\sqrt{3}$.

б) Вокруг цилиндра описана правильная треугольная призма. Найдите объем призмы, если объем цилиндра равен $5\pi\sqrt{3}$.

A37. а) Металлический пожарный конус наполнен песком так, что песок занимает весь объем конуса. Сколько таких конусов с песком потребуется, чтобы наполнить цилиндрическое ведро, если известно, что радиусы оснований ведра и конуса одинаковы, а высота ведра вдвое больше высоты конуса?

б) Металлический пожарный конус наполнен песком так, что песок занимает весь объем конуса. Сколько таких конусов с песком потребуется, чтобы наполнить цилиндрическое ведро, если известно, что оно имеет ту же высоту, что и конус, а радиус основания ведра вдвое больше радиуса основания конуса?

A38. а) Сосуд, имеющий форму полусферы, заполнен водой. Какое наименьшее число одинаковых бокалов, имеющих форму конуса с прикрепленной к вершине ножкой, радиус основания которого в 3 раза меньше радиуса полусферы, а высота равна радиусу полусферы, потребуется для того, чтобы перелить всю эту воду?

б) Сосуд, имеющий форму полусферы, заполнен водой. Какое наименьшее число одинаковых стаканов, имеющих форму цилиндра, радиус основания которого в 3 раза меньше радиуса полусферы, а высота в 2 раза больше радиуса полусферы, потребуется для того, чтобы перелить всю эту воду?

Уровень В

В1. а) Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, если ребро тетраэдра равно $6\sqrt{2}$.

б) Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, если ребро тетраэдра равно $2\sqrt{6}$.

- В2.** а) В правильный тетраэдр вписан шар. Найдите объём шара, если ребро тетраэдра равно $6\sqrt{6}$.
- б) В правильный тетраэдр вписан шар. Найдите объём шара, если ребро тетраэдра равно $9\sqrt{6}$.
- В3.** а) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S описана сфера. Найдите радиус сферы, если боковое ребро SA пирамиды равно 135 и сторона основания AB пирамиды равна 27.
- б) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S описана сфера. Найдите радиус сферы, если боковое ребро SA пирамиды равно 40 и сторона основания AB пирамиды равна 12.
- В4.** а) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ описан шар. Угол между боковым ребром SA пирамиды и плоскостью основания ABC равен 30° . Найдите площадь поверхности шара, если боковое ребро пирамиды равно 18.
- б) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ описан шар. Угол между боковым ребром SA пирамиды и плоскостью основания ABC равен 30° . Найдите площадь поверхности шара, если боковое ребро пирамиды равно 144.
- В5.** а) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ описан шар. Косинус угла между боковыми гранями SAB и SBC пирамиды равен $\frac{1}{3}$. Найдите площадь поверхности шара, если боковое ребро пирамиды равно 6.
- б) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ описан шар. Косинус угла между боковыми гранями SAB и SBC пирамиды равен $\frac{1}{3}$. Найдите площадь поверхности шара, если боковое ребро пирамиды равно 8.
- В6.** а) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ описан шар. Тангенс угла между плоскостью боковой грани SAB пирамиды и плоскостью её основания ABC равен $2\sqrt{3}$. Найдите площадь поверхности шара, если сторона основания пирамиды равна 3.

- б) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ описан шар. Тангенс угла между плоскостью боковой грани SAB пирамиды и плоскостью её основания ABC равен $2\sqrt{3}$. Найдите площадь поверхности шара, если высота основания пирамиды равна $3\sqrt{3}$.
- В7.** а) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ описан шар. Тангенс угла между плоскостью боковой грани SAB пирамиды и плоскостью её основания ABC равен 4. Найдите радиус шара, если высота пирамиды равна 4.
- б) Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ описан шар. Тангенс угла между плоскостью боковой грани SAB пирамиды и плоскостью её основания ABC равен 4. Найдите радиус шара, если высота пирамиды равна 8.
- В8.** а) В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписан шар. Найдите радиус шара, если высота пирамиды равна 1, а сторона основания равна 2.
- б) В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписан шар. Найдите радиус шара, если высота пирамиды равна 2, а сторона основания равна 4.
- В9.** а) В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписан шар. Угол между плоскостью боковой грани SAB пирамиды и плоскостью её основания ABC равен 60° . Найдите объём шара, если высота пирамиды равна 9.
- б) В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписан шар. Угол между плоскостью боковой грани SAB пирамиды и плоскостью её основания ABC равен 60° . Найдите объём шара, если высота пирамиды равна 18.
- В10.** а) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 45° . Одно основание прямого кругового цилиндра с высотой в 2 раза меньшей высоты пирамиды, лежит в плоскости основания пирамиды, а другое касается всех боковых граней пирамиды. Найдите объём цилиндра, если высота цилиндра в 2 раза меньше высоты пирамиды.

б) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 6, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60° . Одно основание прямого кругового цилиндра с высотой в 2 раза меньшей высоты пирамиды, лежит в плоскости основания пирамиды, а другое касается всех боковых граней пирамиды. Найдите объём цилиндра, если высота цилиндра в 2 раза меньше высоты пирамиды.

В11. а) Найдите радиус шара, вписанного в правильную четырёхугольную пирамиду, если сторона основания пирамиды равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{11}$.

б) Найдите радиус шара, вписанного в правильную четырёхугольную пирамиду, если сторона основания пирамиды равна 4, а боковое ребро равно 3.

В12. а) Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно $\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60° . Найдите объём шара, вписанного в пирамиду.

б) Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно $3\sqrt{10}$, а косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $\frac{1}{3}$. Найдите объём шара, вписанного в пирамиду.

В13. а) Угол между соседними боковыми рёбрами правильной четырёхугольной пирамиды равен 60° , сторона основания равна $\sqrt{2}$. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду.

б) Угол между противоположными боковыми рёбрами правильной четырёхугольной пирамиды равен 90° , сторона основания равна 2. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду.

В14. а) Найдите объём шара, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны 4.

б) Найдите объём шара, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны 3.

В15. а) Найдите объём шара, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, если угол между плоскостью основания пирамиды и плоскостью её боковой грани равен 60° , а в основании лежит квадрат со стороной 4.

- б) Найдите объём шара, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, если угол между высотой пирамиды и плоскостью её боковой грани равен 60° , а в основании лежит квадрат со стороной 2,4.
- В16.** а) В основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 6, боковое ребро пирамиды равно $5\sqrt{2}$. Найдите радиус шара, описанного около этой пирамиды.
- б) В основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 10, а высота пирамиды равна $12\sqrt{2}$. Найдите радиус шара, описанного около этой пирамиды.
- В17.** а) В основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 4, высота пирамиды равна 5. Найдите радиус шара, описанного около этой пирамиды.
- б) В основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 2, высота пирамиды равна 3. Найдите радиус шара, описанного около этой пирамиды.
- В18.** а) В правильную шестиугольную пирамиду $SABCDEF$ вписан шар. Косинус угла между плоскостью боковой грани SAB и плоскостью основания $ABCDEF$ равен $\frac{2}{3}$. Найдите объём шара, если высота пирамиды равна 15.
- б) В правильную шестиугольную пирамиду $SABCDEF$ вписан шар. Косинус угла между плоскостью боковой грани SAB и плоскостью основания $ABCDEF$ равен $\frac{2}{5}$. Найдите объём шара, если высота пирамиды равна 21.
- В19.** а) Около правильной шестиугольной пирамиды описана сфера. Найдите площадь поверхности сферы, если сторона основания пирамиды равна 4, а высота пирамиды равна 2.
- б) Около правильной шестиугольной пирамиды описана сфера. Найдите площадь поверхности сферы, если сторона основания пирамиды равна 2, а высота пирамиды равна 1.
- В20.** а) В правильную шестиугольную пирамиду вписан шар. Найдите объём шара, если сторона основания пирамиды равна 6, а высота пирамиды равна 9.

б) В правильную шестиугольную пирамиду вписан шар. Найдите объём шара, если сторона основания пирамиды равна 12, а высота пирамиды равна 18.

B21. а) Основания первого цилиндра вписаны в основания правильной призмы, а основания второго цилиндра описаны около оснований этой призмы. Докажите, что отношение объёма первого цилиндра к объёму второго цилиндра есть постоянная величина для любой заданной правильной призмы. Найдите это отношение для правильной четырёхугольной призмы.

б) Основания первого цилиндра вписаны в основания правильной призмы, а основания второго цилиндра описаны около оснований этой призмы. Докажите, что отношение объёма первого цилиндра к объёму второго цилиндра есть постоянная величина для любой заданной правильной призмы. Найдите это отношение для правильной треугольной призмы.

B22. а) Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной треугольной пирамиды, а окружность второго основания цилиндра вписана в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину её высоты. Докажите, что радиус основания цилиндра в 6 раз меньше высоты основания пирамиды. Найдите объём цилиндра, если объём пирамиды равен 24.

б) Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной треугольной пирамиды, а окружность второго основания цилиндра вписана в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину её высоты. Докажите, что радиус основания цилиндра в 6 раз меньше высоты основания пирамиды. Найдите объём цилиндра, если объём пирамиды равен $12\sqrt{3}$.

B23. а) Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной четырёхугольной пирамиды, а окружность второго цилиндра вписана в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку на её высоте, делящую эту высоту в отношении 1 : 2, считая от вершины. Докажите, что радиус основания цилиндра в 6 раз меньше стороны основания пирамиды. Найдите объём цилиндра, если объём пирамиды равен 18.

б) Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной четырёхугольной пирамиды, а окружность второго цилиндра вписана в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку на её высоте, делящую эту высоту в отношении $1 : 2$, считая от вершины. Докажите, что радиус основания цилиндра в 6 раз меньше стороны основания пирамиды. Найдите объём цилиндра, если объём пирамиды равен 36.

В24. а) Площадь сечения шара плоскостью α , удалённой от центра шара на расстояние, равное 12, равна 81π . Найдите объём прямого кругового конуса, основание которого — сечение шара плоскостью α , а вершина лежит на поверхности шара.

б) Площадь сечения шара плоскостью α , удалённой от центра шара на расстояние, равное 4, равна 27π . Найдите объём прямого кругового конуса, основание которого — сечение шара плоскостью α , а вершина лежит на поверхности шара.

Уровень С

С1. а) На окружности основания прямого кругового конуса с вершиной P выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как $1 : 2$. Отрезок MN — диаметр окружности основания, перпендикулярный хорде AB . Докажите, что объём одной из пирамид $PAMN$ и $PABM$ вдвое больше объёма другой. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP , если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 7.

б) В окружность основания прямого кругового конуса с вершиной P вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что объём пирамиды $PABD$ вдвое больше объёма пирамиды $PDEF$. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP , если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 9.

С2. а) Вершины двух прямых круговых конусов совпадают с вершиной правильной пирамиды. Основание первого конуса вписано в основание пирамиды, а второго — описано около основания пирамиды. Докажите, что отношение объёма первого конуса к объёму второго конуса есть постоянная величина для любой заданной правильной пирамиды. Найдите это отношение для правильной треугольной пирамиды.

б) Вершины двух прямых круговых конусов совпадают с вершиной правильной пирамиды. Основание первого конуса вписано в основание пирамиды, а второго — описано около основания пирамиды. Докажите, что отношение объёма первого конуса к объёму второго конуса есть постоянная величина для любой заданной правильной пирамиды. Найдите это отношение для правильной четырёхугольной пирамиды.

- С3.** а) Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 4 и радиус основания 2. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что точки A и C принадлежат окружности основания, точки B и D принадлежат боковой поверхности, причём точка B принадлежит образующей OA . Прямая BD параллельна плоскости основания конуса, $OB : BA = 1 : 2$, $AC = \sqrt{7}$, $BD = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$.

б) Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 3 и радиус основания 2. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что точки A и C принадлежат окружности основания, точки B и D принадлежат боковой поверхности, причём точка B принадлежит образующей OA . Известно, что $OB = OD = AB$, $AC = 2\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{2}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$.

- С4.** а) Плоскость α проходит через диаметр AB сферы. Через произвольную точку M , лежащую на сфере, но не лежащую в плоскости α , проведена плоскость β , перпендикулярная прямой AB . Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями α и β . Докажите, что $\angle CMD = 90^\circ$. Вершина конуса совпадает с точкой A , а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью β . Найдите объём конуса, если диаметр сферы равен 15, а $MB = 3\sqrt{5}$.

б) Плоскость α проходит через диаметр AB сферы. Через произвольную точку M , лежащую на сфере, но не лежащую в плоскости α , проведена плоскость β , перпендикулярная прямой AB . Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями α и β . Докажите, что $\angle CMD = 90^\circ$. Вершина конуса совпадает с точкой A , а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью β . Найдите объём конуса, если радиус сферы равен 15, а $MB = 6\sqrt{5}$.

- С5.** а) Плоскость α проходит через диаметр AB сферы. Через точку B проведена плоскость, касательная к сфере. На этой плоскости взята точка K , причём отрезок KB равен радиусу сферы. Луч AK пересекает сферу в точке M . Через точку M проведена плоскость β , перпендикулярная прямой AB . Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями α и β . Докажите, что отрезок CD — диаметр окружности сечения сферы плоскостью β . Вершина конуса совпадает с точкой B , а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью β . Найдите объём конуса, если радиус сферы равен 5.
- б) Плоскость α проходит через диаметр AB сферы. Через точку B проведена плоскость, касательная к сфере. На этой плоскости взята точка K , причём отрезок KB равен радиусу сферы. Луч AK пересекает сферу в точке M . Через точку M проведена плоскость β , перпендикулярная прямой AB . Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями α и β . Докажите, что отрезок CD — диаметр окружности сечения сферы плоскостью β . Вершина конуса совпадает с точкой B , а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью β . Найдите объём конуса, если радиус сферы равен 15.
- С6.** а) Через точку P , лежащую на диаметре AB шара, проведена плоскость, перпендикулярная этому диаметру и пересекающая шар по кругу радиуса 3. Докажите, что $AP \cdot PB = 9$. Найдите высоту конуса наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса 3.
- б) Через точку P , лежащую на диаметре AB шара, проведена плоскость, перпендикулярная этому диаметру и пересекающая шар по кругу радиуса 5. Докажите, что $AP \cdot PB = 25$. Найдите высоту конуса наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса 5.
- С7.** а) Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M , при этом плоскость ABM образует угол 15° с плоскостью ABC . Докажите, что расстояние от центра сферы до плоскости ABM вдвое меньше радиуса окружности, описанной около грани куба. Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы, если ребро куба равно 2.

б) Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ описана сфера. На ребре $B_1 C_1$ взята точка M , при этом плоскость ABM образует угол 75° с плоскостью ABC . Докажите, что расстояние от центра сферы до плоскости ABM вдвое меньше радиуса окружности, описанной около грани куба. Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы, если ребро куба равно 1.

C8. а) Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно A , точка K — середина ребра AB , точка E лежит на ребре CD , причём $EC : ED = 1 : 2$, точка F — центр грани ABC . Найдите радиус сферы, проходящей через точки A, B, E, F .

б) Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно A , точка K — середина ребра AB , точка E лежит на ребре CD , причём $EC : ED = 1 : 3$, точка F — центр грани ABC . Найдите радиус сферы, проходящей через точки A, B, E, F .

C9. а) Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, косинус угла между боковым ребром и плоскостью основания равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$. На рёбрах SA и SD лежат точки E и F так, что $AE = 2ES$, $DF = 8SF$. Через точки E и F проведена плоскость α , параллельная ребру AB . Найдите радиус сферы с центром в точке A , касающейся плоскости α .

б) Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро равно $\sqrt{10}$. На рёбрах SA и SD лежат точки E и F так, что $SE = 5AE$, $DF = 2SF$. Через точки E и F проведена плоскость α , параллельная ребру CD . Найдите радиус сферы с центром в точке A , касающейся плоскости α .

C10. а) Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах AB, BC, CD, DA . Известно, что высота пирамиды равна $\sqrt{6}$, $AB = 8$, $SA = 4$, $SB = 8$, $SC = 4\sqrt{6}$. Найдите радиус сферы.

б) Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах AB, BC, CD, DA . Известно, что высота пирамиды равна $\sqrt{5}$, $AB = 12$, $SA = 5$, $SB = 11$, $SC = \sqrt{85}$. Найдите радиус сферы.

- C11.** а) Сфера касается граней ACD и BCD треугольной пирамиды $ABCD$ в точках B_1 и A_1 соответственно, являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро AB в точках K и L . Известно, что $AB = 4$, $KL = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $BC = 2\sqrt{6}$, $AD = 6$. Найдите радиус окружности сечения сферы плоскостью ABC .
- б) Сфера касается граней ACD и BCD треугольной пирамиды $ABCD$ в точках B_1 и A_1 соответственно, являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро AB в точках K и L . Известно, что $AB = \sqrt{14}$, $KL = \sqrt{7}$, $BC = \sqrt{\frac{63}{2}}$, $AD = \sqrt{42}$. Найдите радиус окружности сечения сферы плоскостью ABC .
- C12.** а) В пирамиде $SABC$ косинус каждого из углов ASB и ASC равен $\frac{1}{\sqrt{26}}$, угол BSC прямой, ребро SC равно a . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, если её центр лежит на высоте SD пирамиды.
- б) В пирамиде $SABC$ косинус каждого из углов ASB и ASC равен $\frac{1}{\sqrt{10}}$, угол BSC прямой, ребро SC равно a . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, если её центр лежит на высоте SD пирамиды.
- C13.** а) Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром длины 1. Точка P — середина ребра BC , точка M — точка пересечения медиан треугольника ADC . Сфера, вписанная в трёхгранный угол с вершиной A , касается прямой MP . Найдите радиус сферы.
- б) Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром длины 16. Точка P — середина ребра BC , точка M — точка пересечения медиан треугольника ADC . Сфера, вписанная в трёхгранный угол с вершиной A , касается прямой MP . Найдите радиус сферы.
- C14.** а) Дан правильный тетраэдр $DABC$ с ребром длины 1. Сфера касается рёбер AD , AB и AC тетраэдра и проходит через середину его ребра BC . Найдите радиус сферы.
- б) Дан правильный тетраэдр $DABC$ с ребром длины 4. Сфера касается рёбер AB , AC и AD тетраэдра и проходит через середину его ребра CD . Найдите радиус сферы.

- С15.** а) Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершину C_1 и касающейся рёбер AB , AD и AA_1 куба.
- б) Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершину D_1 и касающейся рёбер BC , AB и BB_1 куба.
- С16.** а) Дан правильный тетраэдр $DABC$ с ребром длины 1. Точка K — середина ребра DC , точка O — центр шара радиуса $\sqrt{2}$, касающегося прямых AD , AC и AB . Найдите длину отрезка OK .
- б) Дан правильный тетраэдр $DABC$ с ребром длины 3. Точка K — середина ребра DC , точка O — центр шара радиуса $3\sqrt{2}$, касающегося прямых AD , AC и AB . Найдите длину отрезка OK .
- С17.** а) Два равных треугольника KHM и KHP имеют общую сторону KH и лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Известно, что $\angle KHM = \angle HKP = \frac{\pi}{3}$, $KH = 1$, $HM = KP = 6$. Шар касается отрезков HM и KP в их серединах. Найдите радиус шара.
- б) Два равных треугольника KHP и MHP имеют общую сторону HP и лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Известно, что $\angle HPK = \angle PHM = \frac{\pi}{6}$, $HP = 2\sqrt{3}$, $KP = HM = 12$. Шар касается отрезков KP и HM в точках B и T соответственно, причём $KB : KP = TM : HM = 1 : 3$. Найдите радиус шара.
- С18.** а) Длина каждого из рёбер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равна 1. Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается рёбер PB и PD в их серединах. Найдите объём пирамиды $OPCD$.
- б) Длина каждого из рёбер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равна 2. Сфера с центром в точке O проходит через точку B и касается рёбер PC и PA в их серединах. Найдите объём пирамиды $OPDA$.

- С19.** а) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 1. Сфера касается рёбер AA_1 , AB и $A_1 D_1$ и проходит через точку M ребра CC_1 , причём $CM = \frac{1}{3}$. Найдите радиус сферы.
- б) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 2. Сфера касается рёбер AA_1 , AB и $A_1 D_1$ и проходит через точку M ребра CC_1 , причём $CM = \frac{2}{3}$. Найдите радиус сферы.
- С20.** а) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 8. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A , B , D куба и середину ребра $A_1 B_1$.
- б) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 16. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A , B , D куба и середину ребра $A_1 B_1$.
- С21.** а) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 2. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A , C куба и середины его рёбер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$.
- б) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 4. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A , C куба и середины его рёбер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$.
- С22.** а) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A , C_1 куба и середины его рёбер AA_1 и BB_1 .
- б) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 4. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A , C_1 куба и середины его рёбер AA_1 и BB_1 .
- С23.** а) Длина ребра правильного тетраэдра $PABC$ равна 16. Через вершины P и C тетраэдра и середины его рёбер AB и AC проведена сфера. Найдите радиус сферы.
- б) Длина ребра правильного тетраэдра $PABC$ равна 8. Через вершины P и C тетраэдра и середины его рёбер AB и AC проведена сфера. Найдите радиус сферы.
- С24.** а) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 4. Найдите радиус сферы, проходящей через середины рёбер AB , AD , AA_1 куба и его вершину C_1 .

б) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 5. Найдите радиус сферы, проходящей через середины рёбер AB , AD , AA_1 куба и его вершину C_1 .

C25. а) Основанием пирамиды $DABC$ является равносторонний треугольник ABC , сторона которого равна 5. Известно, что $AD = BD = 4$, $CD = \frac{3}{2}$. Найдите радиус описанной около пирамиды $DABC$ сферы.

б) Основанием пирамиды $DABC$ является равносторонний треугольник ABC , сторона которого равна 15. Известно, что $AD = BD = 12$, $CD = \frac{9}{2}$. Найдите радиус описанной около пирамиды $DABC$ сферы.

C26. а) В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна высоте пирамиды и равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины P и B пирамиды и середины её рёбер AD и BC .

б) В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна высоте пирамиды и равна 2. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины P и B пирамиды и середины её рёбер AD и BC .

C27. а) В тетраэдре $DABC$ рёбра AC , BC и DC взаимно перпендикулярны. Центр M сферы, касающейся рёбер AB , BC и CD , лежит в плоскости ABC . Центр K другой сферы, касающейся тех же рёбер, лежит в плоскости BCD . Найдите отрезок MK , если $BC = DC = \sqrt{3}$, $AC = 3$.

б) В тетраэдре $DABC$ рёбра AC , BC и DC взаимно перпендикулярны. Центр M сферы, касающейся рёбер AB , BC и CD , лежит в плоскости ABC . Центр K другой сферы, касающейся тех же рёбер, лежит в плоскости BCD . Найдите отрезок MK , если $BC = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$.

C28. а) Дана правильная треугольная пирамида $PABC$ с вершиной P . Известно, что $PA = 2$, $AB = \sqrt{3}$. Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей PAB и PAC в точках B и C соответственно. Вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей PAC и PBC в точках A и B соответственно. Найдите объём пирамиды PO_1BO_2 .

б) Дана правильная треугольная пирамида $PABC$ с вершиной P . Известно, что $PA = 6$, $AB = 3\sqrt{3}$. Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей PAB и PAC в точках B и C соответственно. Вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей PAC и PBC в точках A и B соответственно. Найдите объём пирамиды PO_1BO_2 .

С29. а) В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P и основанием $ABCD$ длина стороны основания равна 1, а длина бокового ребра равна 2. Сфера с центром в точке O касается плоскости ABC в точке A и касается бокового ребра PB . Найдите объём пирамиды $OABCD$.

б) В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P и основанием $ABCD$ длина стороны основания равна 2, а длина бокового ребра равна 4. Сфера с центром в точке O касается плоскости ABC в точке A и касается бокового ребра PB . Найдите объём пирамиды $OABCD$.

С30. а) В правильной треугольной пирамиде $PABC$ с вершиной P и основанием ABC длина стороны основания равна 3, а длина бокового ребра равна 2. Сфера касается плоскости основания пирамиды в точке A и касается бокового ребра PB . Найдите радиус сферы.

б) В правильной треугольной пирамиде $PABC$ с вершиной P и основанием ABC длина стороны основания равна 6, а длина бокового ребра равна 4. Сфера касается плоскости основания пирамиды в точке A и касается бокового ребра PB . Найдите радиус сферы.

С31. а) В основании треугольной пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами AB и AC . Все боковые рёбра пирамиды имеют равную длину, а высота пирамиды, проведённая из вершины D , равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Сфера касается плоскости ABC , боковых рёбер DB и DA пирамиды и продолжения бокового ребра CD за точку D . Найдите расстояние от центра сферы до вершины D , если $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$.

б) В основании треугольной пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами AB и AC . Все боковые рёбра пирамиды имеют равную длину, а высота пирамиды, проведённая из вершины D , равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Сфера касается плоскости ABC , боковых рёбер DB и DA пирамиды и продолжения бокового ребра CD за точку D . Найдите расстояние от центра сферы до вершины D , если $AB = \sqrt{3}$, $AC = 3$.

С32. а) В основании треугольной пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC , в котором $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, $BC = 2\sqrt{2}$. Все боковые рёбра пирамиды имеют одинаковую длину, равную $\sqrt{3}$. Сфера касается рёбер DA , DB пирамиды, продолжения его ребра DC за точку D и плоскости ABC . Найдите радиус сферы.

б) В основании треугольной пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC , в котором $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, $BC = 2\sqrt{6}$. Все боковые рёбра пирамиды имеют одинаковую длину, равную 3. Сфера касается рёбер DA , DB пирамиды, продолжения его ребра DC за точку D и плоскости ABC . Найдите радиус сферы.

С33. а) Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Точка E является серединой ребра AA_1 . На продолжении ребра DA за точку A взята точка P так, что $PA : AD = 1 : 2$. Найдите радиус меньшей из сфер, проходящей через точки E и P и касающейся плоскостей $BB_1 C_1$ и $DD_1 C_1$.

б) Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Точки E и P являются серединами рёбер $A_1 D_1$ и AA_1 соответственно. Найдите радиус меньшей из сфер, проходящей через точки E и P и касающейся плоскостей $BB_1 C_1$ и $DD_1 C_1$.

С34. а) В треугольной пирамиде $PABC$ с вершиной P боковое ребро PC образует с плоскостью основания ABC угол 60° . Известно, что $PC = AB$ и что вершины A , B , C и середины боковых рёбер пирамиды лежат на сфере радиуса 1. Докажите, что центр сферы — середина ребра AB пирамиды. Найдите высоту пирамиды, проведённую из вершины P .

б) В треугольной пирамиде $PABC$ с вершиной P боковое ребро PC образует с плоскостью основания ABC угол 60° . Известно, что $PC = AB$ и что вершины A, B, C и середины боковых рёбер пирамиды лежат на сфере радиуса $\sqrt{6}$. Докажите, что центр сферы — середина ребра AB пирамиды. Найдите высоту пирамиды, проведённую из вершины P .

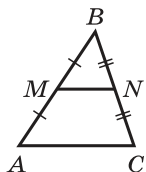
С35. а) В треугольной пирамиде $PABC$ с вершиной P боковое ребро PA образует с плоскостями граней ABC и PBC углы, равные 45° . Известно, что $AC = AB$ и что вершина A и середины всех рёбер пирамиды, кроме PA , лежат на сфере радиуса 1. Докажите, что центр сферы лежит на ребре PA пирамиды, и найдите площадь грани APC .

б) В треугольной пирамиде $PABC$ с вершиной P боковое ребро PA образует с плоскостями граней ABC и PBC углы, равные 45° . Известно, что $AC = AB$ и что вершина A и середины всех рёбер пирамиды, кроме PA , лежат на сфере радиуса 2. Докажите, что центр сферы лежит на ребре PA пирамиды, и найдите площадь грани APC .

С36. а) Середины всех рёбер треугольной пирамиды $PABC$ лежат на сфере радиуса 2. Боковое ребро PA пирамиды перпендикулярно плоскости основания ABC . Известно, что $AB = 3$, $AC = 4$. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер пирамиды, являются диаметрами данной сферы, и найдите объём пирамиды.

б) Середины всех рёбер треугольной пирамиды $PABC$ лежат на сфере радиуса 4. Боковое ребро PA пирамиды перпендикулярно плоскости основания ABC . Известно, что $AB = 6$, $AC = 8$. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер пирамиды, являются диаметрами данной сферы, и найдите объём пирамиды.

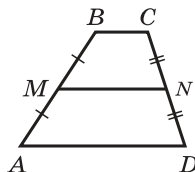
Средняя линия треугольника и трапеции



MN — средняя линия

$$MN \parallel AC$$

$$MN = \frac{AC}{2}$$



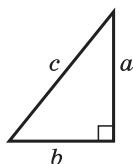
$$BC \parallel AD$$

MN — средняя линия

$$MN \parallel AD$$

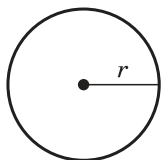
$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

Теорема Пифагора



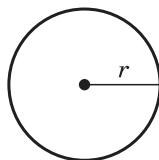
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Окружность



Длина окружности

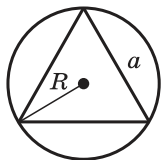
$$C = 2\pi r$$



Площадь круга

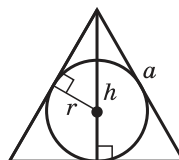
$$S = \pi r^2$$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

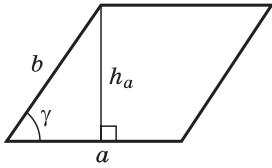


$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Площади фигур

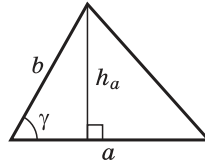
Параллелограмм



$$S = ah_a$$

$$S = ab \sin \gamma$$

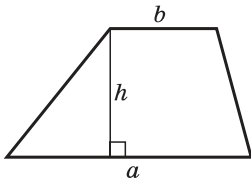
Треугольник



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

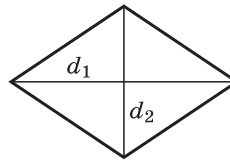
$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2}h$$

Ромб

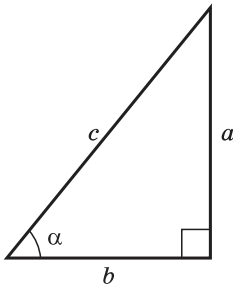


d_1, d_2 —
диагонали

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

Тригонометрические функции

Прямоугольный треугольник

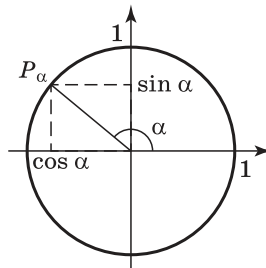


$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

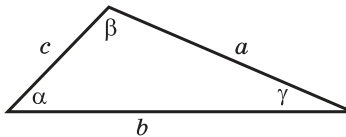
Тригонометрическая окружность



Теоремы синусов и косинусов

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Некоторые значения тригонометрических функций

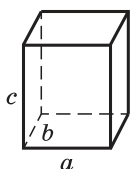
α	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Правильные n-угольники

n	a (сторона)	P (периметр)	S (площадь)	R (радиус описанной окружности)	r (радиус вписанной окружности)
3	$a = R\sqrt{3}$ $a = 2r\sqrt{3}$	$P = 3a$	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$
4	$a = R\sqrt{2}$ $a = 2r$	$P = 4a$	$S = a^2$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$r = \frac{a}{2}$
6	$a = R$ $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$	$P = 6a$	$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R = a$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
n	$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ $a = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$	$P = na$	$S = \frac{na^2}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$	$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$

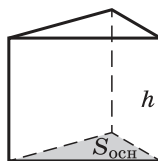
Площади поверхностей и объёмы тел

Прямоугольный параллелепипед



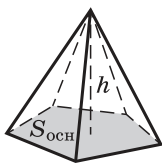
$$V = abc$$

Прямая призма



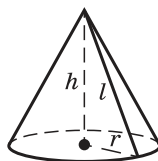
$$V = S_{\text{осн}} h$$

Пирамида



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

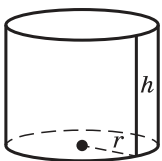
Конус



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = \pi r l$$

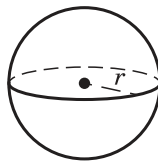
Цилиндр



$$V = \pi r^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h$$

Шар



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Оглавление

Предисловие	3
-------------------	---

ПЛАНИМЕТРИЯ

Глава 1. Отрезки, углы, треугольники

1.1. Отрезки и углы	5
1.2. Равносторонний и равнобедренный треугольники	9
1.3. Прямоугольный треугольник	13
1.4. Произвольный треугольник	18
1.5. Координаты и векторы	29

Глава 2. Многоугольники

2.1. Параллелограмм	33
2.2. Трапеция	39
2.3. Прочие многоугольники	47
2.4. Координаты и векторы	54

Глава 3. Окружности

3.1. Углы и отрезки, связанные с окружностью	58
3.2. Окружность и треугольники	66
3.3. Окружность и многоугольники	75

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Глава 4. Прямые, плоскости, призмы

4.1. Призма, её элементы. Правильная треугольная призма	83
4.2. Куб	97
4.3. Прямоугольный параллелепипед	104
4.4. Произвольный параллелепипед	114
4.5. Правильная шестиугольная призма	116
4.6. Произвольные многогранники	119

Глава 5. Пирамиды

5.1. Правильная треугольная пирамида	136
5.2. Правильная четырёхугольная пирамида	144
5.3. Правильная шестиугольная пирамида	154
5.4. Произвольная пирамида	160
5.5. Комбинации многогранников	171

Глава 6. Тела вращения

6.1. Цилиндр	181
6.2. Конус	189
6.3. Сфера и шар	201
6.4. Комбинации тел вращения и многогранников	208

Справочные материалы	235
----------------------------	-----



Учебное издание

Яценко Иван Валериевич
Шестаков Сергей Алексеевич

Геометрия
Универсальный многоуровневый сборник задач
10—11 классы

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Редакция математики и информатики
Заведующий редакцией *Е. В. Эргле*
Ответственный за выпуск *И. В. Рекман*
Редакторы *Л. В. Кузнецова, И. В. Рекман*
Младшие редакторы *Е. А. Андрееenkova, Е. В. Трошко*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Дизайн *Ю. В. Тигиной, О. Г. Чичвариной*
Компьютерная графика *Э. В. Алексеева*
Компьютерная вёрстка и техническое редактирование
С. В. Китаевой, Е. М. Завалей
Корректоры *Е. А. Воеводина, Н. А. Смирнова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 12.08.2020. Формат 70 × 90¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать цифровая. Уч.-изд. л. 11,53. Тираж 600 экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников —
электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Отпечатано в России.