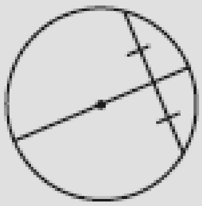
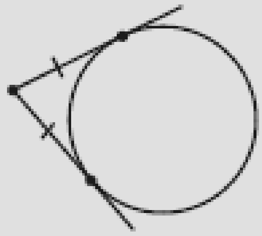
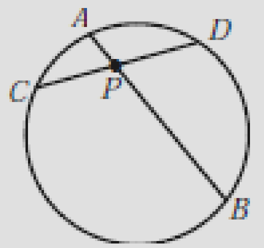
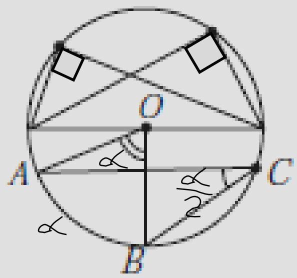
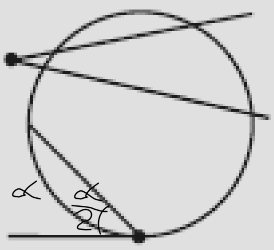
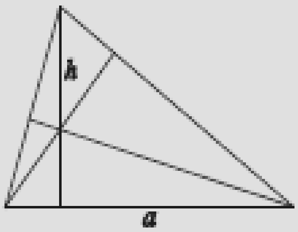
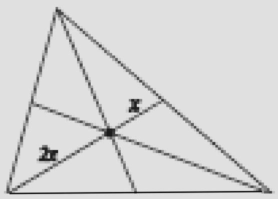
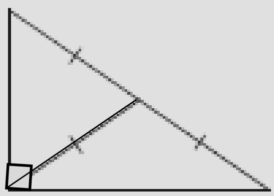
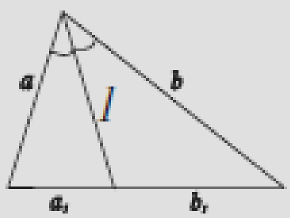
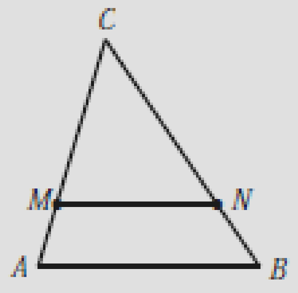
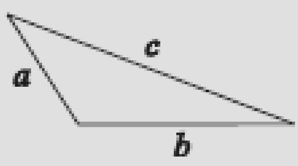
ЗАДАЧИ-ТЕОРЕМЫ

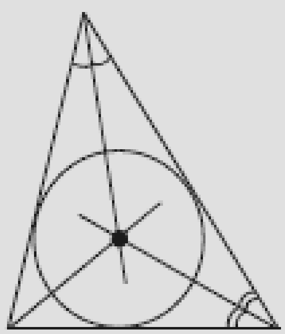
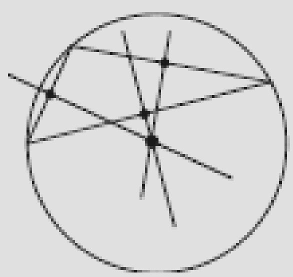
Зеленяк О. П.
Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач_теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal / О. П. Зеленяк. — Киев, Москва: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. — 336 с.

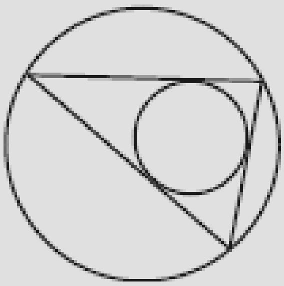
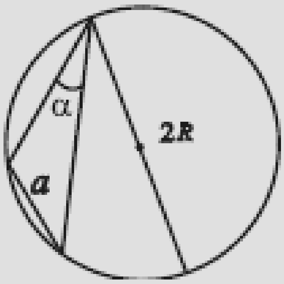
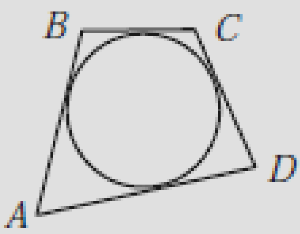
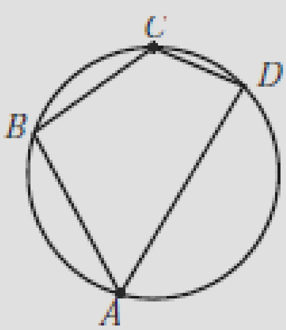
Окружность (*хорды, касательные, углы*)		
	**1**	Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей. Верно и обратное утверждение.
	**2**	Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.
	**3**	Если AB и CD хорды окружности, пересекающиеся в точке P, то $$AP \cdot BP = CP \cdot DP.$$
	**4**	Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной угловой величины дуги, на которую он опирается. *Следствие*: вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. *Замечательное свойство окружности.* Вписанные углы, опирающиеся на половину окружности (диаметр), прямые.
	**5**	Угол, вершина которого вне (внутри) круга, измеряется полуразностью (полусуммой) дуг, находящихся между его сторонами (и их продолжениями за вершину угла). Угол, образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, находящейся между его сторонами.

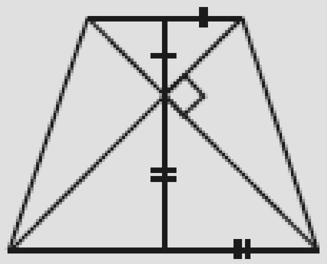
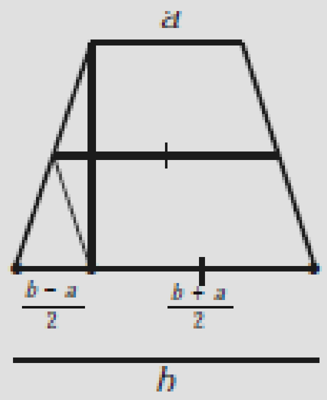
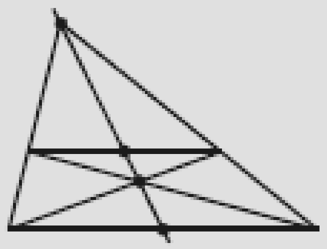
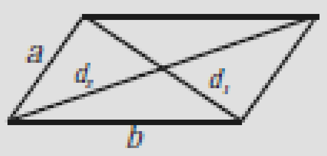
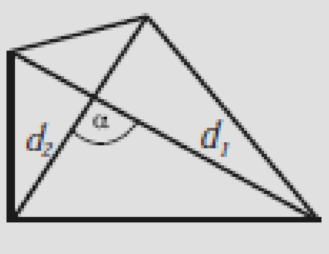
Треугольник (*высоты, медианы, биссектриса*)		
	**6**	Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентре). Если известны стороны треугольника a, b и c, то $h = \dfrac{2S}{a}$ или $a = \dfrac{2S}{h}$, где h – высота, проведенная к стороне a, S – площадь треугольника, определяемая по формуле Герона.
	**7**	Медианы треугольника пересекаются в одной точке (центре тяжести) и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершины. $m_a = \sqrt{\dfrac{b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}}$.
	**8**	Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника, а длина её равна половине гипотенузы. Верно и обратное утверждение.
	**9**	Биссектриса l угла треугольника делит его противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, т.е. $a : b = a_1 : b_1$. $l = \sqrt{ab - a_1 b_1}$.

 	**10**	Если прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке M, а сторону BC в точке N, то треугольники ABC и MNC подобны. *Следствие*: $CM : MA = CN : NB$.
 	**11**	*Определение вида треугольника.* В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, и, наоборот. Пусть a, b, c – стороны треугольника, причем c – наибольшая сторона. $c^2 > a^2 + b^2$: треугольник – тупоугольный; $c^2 = a^2 + b^2$: треугольник – прямоугольный; $c^2 < a^2 + b^2$: треугольник – остроугольный.

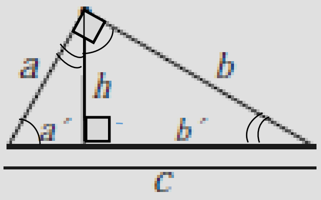
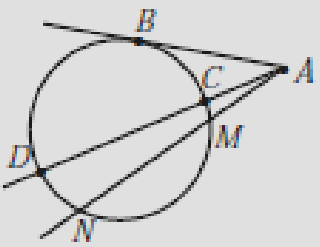
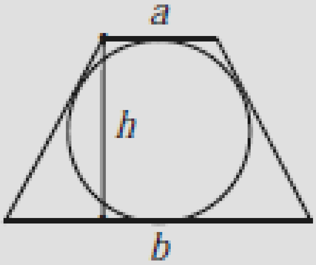
Окружность и треугольник

	**12**	Во всякий треугольник можно вписать единственную окружность. Её центром является точка пересечения биссектрис углов треугольника. *Биссектриса угла есть г.м.т., расположенных внутри угла и одинаково удаленных от его сторон.*
	**13**	Около всякого треугольника можно описать единственную окружность. Её центром является точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника. *Серединный перпендикуляр к отрезку есть г.м.т., равноудаленных от концов отрезка.*

	**14**	Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника находят по формулам: $r=\dfrac{S}{p}$, $R=\dfrac{abc}{4S}$. a, b, c – длины сторон, S – площадь треугольника, p – его полупериметр. *Следствие*: в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c: $r=\dfrac{a+b-c}{2}$, $R=\dfrac{c}{2}$.
	**15**	*Следствие из теоремы синусов.* Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего ей угла равно диаметру описанной окружности, т.е. $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$ или $a=2R\sin\alpha$.
Окружность и четырехугольник		
	**16**	Для того чтобы в четырехугольник можно было **вписать** окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин его противолежащих сторон были равны. $AB+CD=BC+AD$.
	**17**	Для того чтобы около четырехугольника можно было **описать** окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противолежащих углов была равна 180°. $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$.

<table>
<tr><th colspan="3">Четырехугольник</th></tr>
<tr><td></td><td>18</td><td>Если диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, то длина ее высоты равна длине средней линии, а площадь равна квадрату высоты трапеции, т.е. $S = h^2$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>19</td><td>Если основания равнобочной трапеции равны a и b ($a < b$), то ее высота делит основание b на части $\frac{b-a}{2}$ и $\frac{b+a}{2}$.
Большая из этих частей равна средней линии трапеции.</td></tr>
<tr><td></td><td>20</td><td>Замечательное свойство трапеции.
Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений её боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>21</td><td>Следствие из теоремы косинусов.
Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, т.е. $d_1^2 + d_2^2 = 2\,(a^2 + b^2)$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>22</td><td>Площадь любого четырехугольника равна половине произведения диагоналей, умноженному на синус угла между ними.
$S = ½\, d_1 d_2 \sin \alpha$.
Следствие: площадь четырехугольника, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей. $S = ½\, d_1 d_2$.</td></tr>
</table>

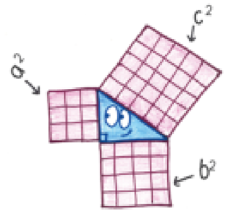
Средние пропорциональные отрезки

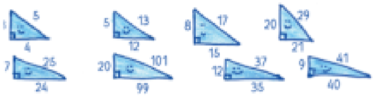
	**23**	Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному. Если в этих треугольниках взять соответствующие линейные элементы x, y, z, то $x^2 + y^2 = z^2$. Пусть a и b – катеты, h – высота, проведенная к гипотенузе c прямоугольного треугольника, a' и b' – проекции катетов на гипотенузу. Тогда $a^2 = a' \cdot c$; $b^2 = b' \cdot c$; $h^2 = a' \cdot b'$. *Следствие*: $h = \dfrac{ab}{c}$.
	**24**	Из точки A, взятой вне окружности, проведены к ней касательная AB и две секущие, пересекающие окружность в точках C и D, M и N соответственно. Тогда $AB^2 = AC \cdot AD$. *Следствие*: $AC \cdot AD = AM \cdot AN$.
	**25**	Высота описанной равнобочной трапеции есть среднее пропорциональное ее оснований, т.е. $h = \sqrt{a \cdot b}$ или $h^2 = ab$.

ИМЕЙТЕ В ВИДУ

1. Вычислять КАЖДУЮ величину не обязательно
2. В условиях задачи часто много дополнительных данных
3. Ищите окружность (вспомогательную)
4. Помогают особые дополнительные построения (окружность, продление медианы на свою длину)
5. Условие задачи или её вопрос можно переформулировать не меняя смысл

СОВЕТ: Собирайте интересные обобщённые факты





ЗАПОМНИТЕ

Пифагоровы тройки:

3, 4, 5	6, 8, 10	9, 12, 15	12, 16, 20	15, 20, 25
5, 12, 13	10, 24, 26	15, 36, 39	20, 48, 52	25, 60, 65
8, 15, 17	16, 30, 34	24, 45, 51	32, 60, 68	40, 75, 85
7, 24, 25	14, 48, 50	21, 72, 75	28, 96, 100	35, 120, 125